SS26. 轉換式總結

本教材介紹了六種轉換，包括傅立葉級數、傅立葉轉換、拉普拉斯轉換、z-轉換、離散時間傅立葉轉換(DTFT)和離散傅立葉轉換(DFT)。四種類型的傅立葉轉換適用於訊號處理，而拉普拉斯轉換和 z-轉換則廣泛應用於濾波器和控制系統的設計。底下總結與這六種轉換相關的性質。

[A]　傅立葉級數—適用於週期性 CT 訊號

傅立葉級數可以將週期性 CT 信號 $f_T\left(t\right)$ 表示為以下之型式：

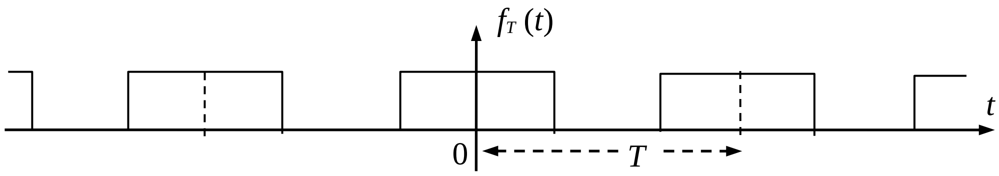
(1)　$$f_T\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$$

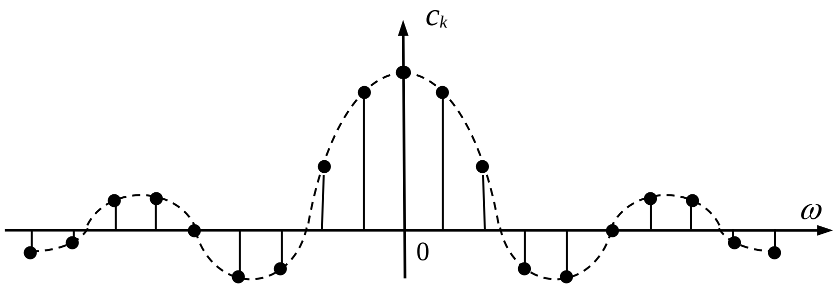
其中 T 為週期，而 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ 為角頻率，此外

(2)　$$c_k=\frac{1}{T}\int_T f_T\left(t\right)e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\left|c_k\right|e^{j\phi_k}$$

是屬於離散型式係數，與角頻率有關，可視為頻率響應。

舉例如下：





性質：利用傅立葉級數可將週期性 CT 訊號轉換為離散型的頻率響應。

[B] 傅立葉轉換—適用於非週期性 CT 訊號

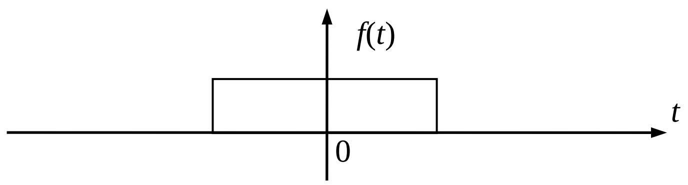
事實上傅立葉轉換也適用於週期性 CT 訊號，不過主要還是應用於非週期性 CT 訊號，傅立葉轉換與反傅立葉轉換如下所示：

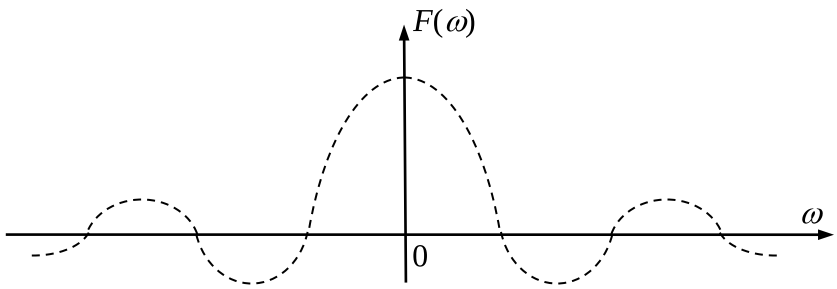
(3) $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

(4) $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

若是將非週期性 CT 訊號視為週期 $T\to\infty$的週期性 CT 訊號，則以上兩式可由(1)與(2)推導而來。

舉例如下：





性質：利用傅立葉轉換可將非週期性 CT 訊號轉換為連續型的頻率響應。

[C] 拉普拉斯轉換(簡稱拉氏轉換)—適用於推導 LTI 的 CT 系統

給定 CT 訊號 $f(t)$，且 $f(t)\big|_{t<0}=0$，則拉氏轉換與反拉氏轉換為

(5) $$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(6) $$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

其中 $s=\sigma+j\omega$，若 $s=j\omega$，則由(5)式可得

(7) $$F(j\omega)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

此式與 $f(t)$ 的傅立葉轉換相同，拉氏轉換已經被廣泛應用於 LTI 的 CT 系統，此類系統通常以 ODE-CC 來描述，如下所示：

(8) $$\begin{aligned} & y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t) \\ & =b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t) \end{aligned} \quad (8)$$

也可以利用狀態空間描述法，如下所示：

(9) $$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t)$$

(10) $$y(t)=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}(t)+du(t)$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t)\end{bmatrix}^T\in\Re^n$ 為狀態向量，此外，$\boldsymbol{A}\in\Re^{n\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\Re^n$，$\boldsymbol{c}\in\Re^{1\times n}$，$d\in\Re$，系統的穩定性由特徵方程式決定，表示式如下：

(11) $$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

可以直接計算特徵值，也可以利用羅斯準則(Routh criterion)來判定是否所有的特徵值都在複數平面的左半面，若是，則系統為穩定，反之則為不穩定。

[D] z-轉換—適用於推導 LTI 的 DT 系統

給定 DT 訊號 $f[k]$，且 $f[k]\big|_{k<0}=0$，則 z-轉換與反 z-轉換為

(12) $$\mathcal{Z}\{f[k]\}=F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}$$

(13) $$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=f[k]=\frac{1}{2\pi j}\int_C F(z)z^{k-1}dz$$

其中的積分迴圈 C 必須在 z-轉換的收斂範圍。

z-轉換已經被廣泛應用於 LTI 的 DT 系統，此類系統通常以輸出-輸入方程式描述如下：

(14) $$\begin{aligned} & y[k+n]+a_{n-1}y[k+n-1]+\cdots+a_1y[k+1]+a_0y[k] \\ & =b_nu[k+n]+b_{n-1}u[k+n-1]+\cdots+b_1u[k+1]+b_0u[k] \end{aligned}$$

也可以利用狀態空間描述法，如下所示：

(15) $\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{b}u[k]$

(16) $y[k]=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}[k]+du[k]$

其中 $\boldsymbol{x}[k]=\begin{bmatrix}x_1[k] & x_2[k] & \cdots & x_n[k]\end{bmatrix}^T\in\Re^n$ 為狀態向量，此外，$\boldsymbol{A}\in\Re^{n\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\Re^n$，$\boldsymbol{c}\in\Re^{1\times n}$，$d\in\Re$，系統的穩定性由特徵方程式決定，表示式如下：

(17) $\left|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$

可以直接計算特徵值，也可以利用朱立測試(Jury's test)來判定是否所有的特徵值都在複數平面的單位圓內，若是，則系統為穩定，反之則為不穩定。

[E] 離散時間傅立葉轉換(DTFT)—適用於 DT 訊號

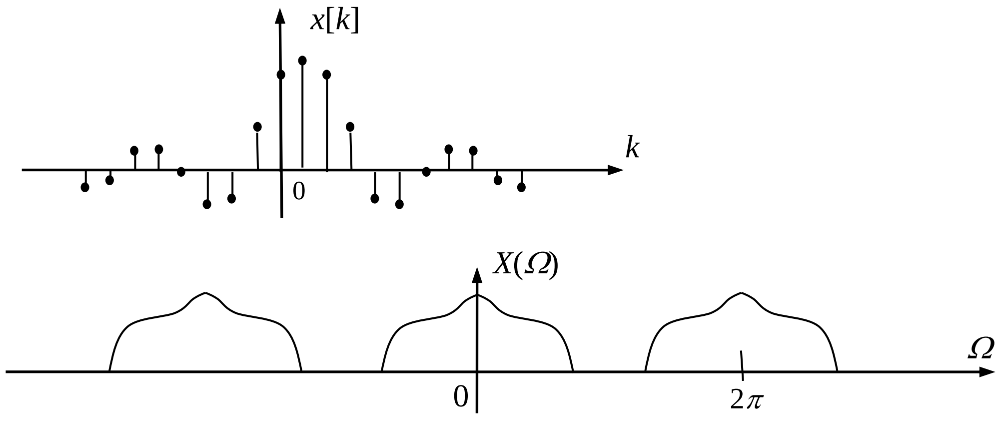
給定 DT 訊號 $x[k]$，則 DTFT 與反 DTFT(或表為 IDTFT)為

(18) $\Im_{DT}\{x[k]\}=X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}$

(19) $\Im_{DT}^{-1}\{X(\Omega)\}=x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{jk\Omega}d\Omega$

其中 $X(\Omega)$ 具有週期 2π。

舉例如下：



性質：利用 DTFT 可將 DT 訊號轉換為週期性的連續頻率響應。

[F]　離散傅立葉轉換(DFT)—適用於 DT 訊號

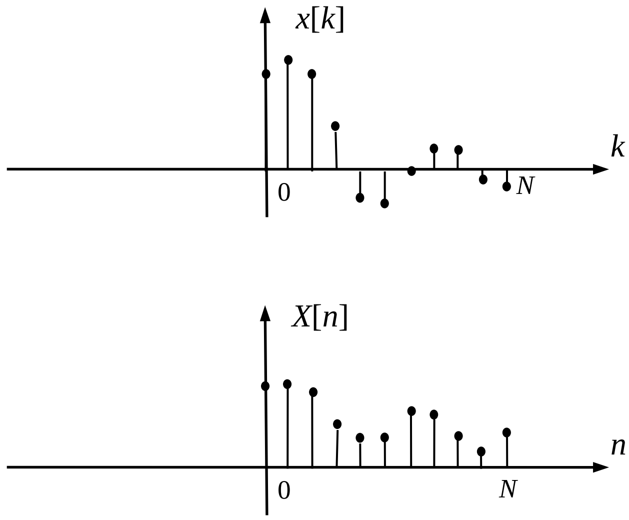
給定 DT 訊號 $x[k]$，則 DFT 與反 DFT(或表為 IDFT)為

(20) $$\Im_D\{x[k]\} = X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{kn}, \quad n=1, 2, \ldots, N-1$$

(21) $$\Im_D^{-1}\{X[n]\} = x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-kn}, \quad k=1, 2, \ldots, N-1$$

其中 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。

舉例如下：



性質：利用 DFT 可將有限區間的 DT 訊號轉換為離散頻率響應。