SS25. 離散傅立葉轉換

在前面所探討的傅立葉變換和離散時間傅立葉變換都會產生連續的頻率函數，為了使用電腦的數位化處理，必須先將連續時間型訊號做取樣成離散時間型訊號，再以其他不同的方式將離散訊號轉換為離散式的頻譜，在這類不同型式的轉換中，最常用的是離散傅立葉轉換(discrete Fourier transdform，簡稱 DFT)。

一般的 CT 訊號 $x(t)$ 取樣後成為 DT 訊號 $x[k]=x(kT)$，其中 T 為取樣時間，經 DTFT 可得

(1) $$X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}$$

其反轉換 IDTFT 則是

(2) $$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)e^{jk\Omega}d\Omega$$

為了使用電腦，通常對 $x[k]$ 取合理的項數後再處理，例如：

(3) $$x_N[k]=\begin{cases}x[k] & 0\le k\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

經 DTFT 可得

(4) $$X_N(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_N[k]e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-jk\Omega}$$

應注意的是 $X_N(\Omega)$ 仍然是一個具有週期 2π 的連續函數，此時再採取每隔 $\frac{2\pi}{N}$ 的頻率取樣方式，取出 N 個離散值如下：

(5) $$\begin{aligned}X_S(\Omega)&=X_N(\Omega)\sum_{n=0}^{N-1}\delta\left(\Omega-2\pi\frac{n}{N}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}X_N(\Omega)\delta\left(\Omega-2\pi\frac{n}{N}\right)\\&=\sum_{n=0}^{N-1}X_N\left(2\pi\frac{n}{N}\right)\delta\left(\Omega-2\pi\frac{n}{N}\right)\end{aligned}$$

接著令 $X[n]=X_S\left(2\pi\frac{n}{N}\right)=X_N\left(2\pi\frac{n}{N}\right)$，$n=0,1,2,\ldots,N-1$，並定義離散傅立葉轉換為

(6) $$\Im_D\{x[k]\}=X[n]=X_N\left(2\pi\frac{n}{N}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

根據此定義計算下列數學式：

(7) $$\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\ e^{jkn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\ e^{-jmn\frac{2\pi}{N}}\right) e^{jkn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(m-k)n\frac{2\pi}{N}}$$

由於

(8) $$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(m-k)n\frac{2\pi}{N}} = \begin{cases} N & m=k \\ 0 & m\neq k \end{cases}$$

代入(7)式可得

(9) $$\sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{jkn\frac{2\pi}{N}} = Nx[k]$$

故可再定義反離散傅立葉轉換(inverse discrete Fourier Transform，簡稱 IDFT)為

(10) $$\Im_D^{-1}\{X[n]\} = x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$

結論如下：

針對 N 個離散時間訊號，其 DFT 與 IDFT 分別為

(11) $$\Im_D\{x[k]\} = X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{kn}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

(12) $$\Im_D^{-1}\{X[n]\} = x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-kn}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

其中 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 且滿足

(13) $$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N & k=0 \\ 0 & k=1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

由於 $X[n]$ 的精準度為 $\frac{2\pi}{N}$，若要增加頻域的精準度，則可提高取樣個數，或採取零填充(zero-padding)的技術，將 0 直接補在原訊號後端。

例題： 若 $x[k]=\begin{cases} k+1, & k=0,1,2,3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，則 N=4 與 N=8 時 DFT 各為何？

解： 當 N=4 時，$W_4=e^{-j2\pi/4}=-j$，由於 $X[n]=\sum_{k=0}^{3}x[k]W_4^{n\times k}$，因此

$$X[0]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]=1+2=3+4=10$$
$$X[1]=x[0]+x[1](-j)+x[2](-j)^2+x[3](-j)^3=1-2j-3+4j=-2+2j$$
$$X[2]=x[0]+x[1](-j)^2+x[2](-j)^4+x[3](-j)^6=1-2+3-4=-2$$
$$X[3]=x[0]+x[1](-j)^3+x[2](-j)^6+x[3](-j)^9=1+2j-3-4j=-2-2j$$

當 N=8 時，$W_8=e^{-j2\pi/8}=e^{-j\pi/4}$，在此情況下必須採取零填充技術，

令 $x[k]=0$，$k=4,5,6,7$，由於 $X[n]=\sum_{k=0}^{7}x[k]W_8^{n\times k}$，因此

$$X[0]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]=1+2=3+4=10$$
$$X[1]=x[0]+x[1]e^{-j\pi/4}+x[2]e^{-j2\pi/4}+x[3]e^{-j3\pi/4}$$
$$=1+\sqrt{2}(1-j)+3(-j)+2\sqrt{2}(-1-j)=1-\sqrt{2}-j\left(3+3\sqrt{2}\right)$$
$$X[2]=x[0]+x[1]e^{-j2\pi/4}+x[2]e^{-j4\pi/4}+x[3]e^{-j6\pi/4}$$
$$=1+2(-j)+3(-1)+4(j)=-2+j2$$
$$X[3]=x[0]+x[1]e^{-j3\pi/4}+x[2]e^{-j6\pi/4}+x[3]e^{-j9\pi/4}$$
$$=1+\sqrt{2}(-1-j)+3(j)+2\sqrt{2}(1-j)=1+\sqrt{2}+j\left(3-3\sqrt{2}\right)$$
$$X[4]=........$$

對 N 個離散時間訊號的 DFT 必須執行 N^2 個乘法運算，為了讓 DFT 的計算更有效率，通常會採用快速傅立葉轉換(fast Fourier transform，簡稱 FFT)，其條件是取樣個數必須為 $N=2^m$ 個，而優勢則是只需執行 $N\left(log_2 N\right)$ 個乘法運算，讓計算量大幅減少。

當 $N=2^m$ 時，$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 的性質如下：

(14) $$W_N^N=e^{-j\frac{2\pi}{N}(N)}=e^{-j2\pi}=1$$

(15) $$W_N^{N/2}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}\right)}=e^{-j\pi}=-1$$

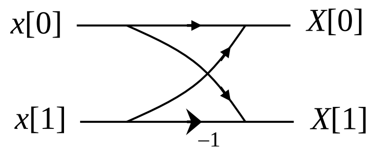
(16) $$W_N^{(N/2)+M}=W_N^{N/2}W_N^M=-W_N^M$$

底下以 N=2，N=4，N=8 為例。

當 N=2 時，$W_2 = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = -1$，FFT 為

$$X[0] = x[0]W_2^0 + x[1]W_2^0 = x[0] + x[1]$$

$$X[1] = x[0]W_2^0 + x[1]W_2^1 = x[0] - x[1]$$



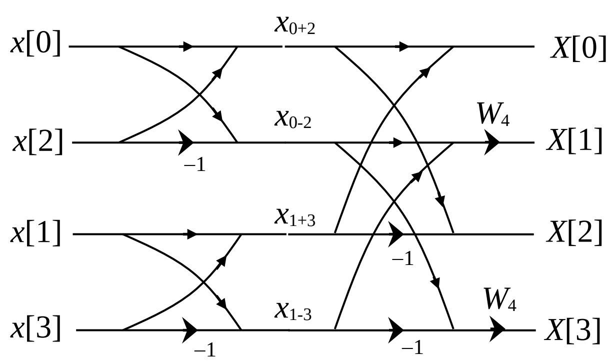
當 N=4 時，$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$ ，FFT 為

$$\begin{aligned} X[0] &= x[0]W_4^0 + x[1]W_4^0 + x[2]W_4^0 + x[3]W_4^0 \\ &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \\ &= \left(x[0] + x[2]\right) + \left(x[1] + x[3]\right) = x_{0+2} + x_{1+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[1] &= x[0]W_4^0 + x[1]W_4^1 + x[2]W_4^2 + x[3]W_4^3 \\ &= x[0] + x[1]W_4 - x[2] - x[3]W_4 \\ &= \left(x[0] - x[2]\right) + \left(x[1] - x[3]\right)W_4 = x_{0-2} + x_{1-3}W_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[2] &= x[0]W_4^0 + x[1]W_4^2 + x[2]W_4^4 + x[3]W_4^6 \\ &= x[0] - x[1] + x[2] - x[3] \\ &= \left(x[0] + x[2]\right) - \left(x[1] + x[3]\right) = x_{0+2} - x_{1+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[3] &= x[0]W_4^0 + x[1]W_4^3 + x[2]W_4^6 + x[3]W_4^9 \\ &= x[0] - x[1]W_4 - x[2] + x[3]W_4 \\ &= \left(x[0] - x[2]\right) - \left(x[1] - x[3]\right)W_4 = x_{0-2} - x_{1-3}W_4 \end{aligned}$$



當 N=8 時，$W_8 = e^{-j\frac{2\pi}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$ ，FFT 為

$$
\begin{aligned}
X[0] &= x[0]W_8^0 + x[1]W_8^0 + x[2]W_8^0 + x[3]W_8^0 \\
&\quad + x[4]W_8^0 + x[5]W_8^0 + x[6]W_8^0 + x[7]W_8^0 \\
&= x[0]+x[1]+x[2]+x[3]+x[4]+x[5]+x[6]+x[7] \\
&= \big(x[0]+x[4]\big)+\big(x[1]+x[5]\big)+\big(x[2]+x[6]\big)+\big(x[3]+x[7]\big) \\
&= x_{0+4}+x_{1+5}+x_{2+6}+x_{3+7} = x_{(0+4)+(2+6)} + x_{(1+5)+(3+7)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[1] &= x[0]W_8^0 + x[1]W_8^1 + x[2]W_8^2 + x[3]W_8^3 \\
&\quad + x[4]W_8^4 + x[5]W_8^5 + x[6]W_8^6 + x[7]W_8^7 \\
&= x[0]+x[1]W_8 + x[2]W_8^2 + x[3]W_8^3 \\
&\quad - x[4]-x[5]W_8 - x[6]W_8^2 - x[7]W_8^3 \\
&= \big(x[0]-x[4]\big)+\big(x[1]-x[5]\big)W_8 \\
&\quad + \big(x[2]-x[6]\big)W_8^2 + \big(x[3]-x[7]\big)W_8^3 \\
&= x_{0-4}+x_{1-5}W_8 + x_{2-6}W_8^2 + x_{3-7}W_8^3 \\
&= \left(x_{0-4}+x_{2-6}W_8^2\right)+\left(x_{1-5}+x_{3-7}W_8^2\right)W_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[2] &= x[0]W_8^0 + x[1]W_8^2 + x[2]W_8^4 + x[3]W_8^6 \\
&\quad + x[4]W_8^8 + x[5]W_8^{10} + x[6]W_8^{12} + x[7]W_8^{14} \\
&= x[0]+x[1]W_8^2 - x[2]-x[3]W_8^2 \\
&\quad + x[4]+x[5]W_8^2 - x[6]-x[7]W_8^2 \\
&= \big(x[0]+x[4]\big)-\big(x[2]+x[6]\big) \\
&\quad + \big(x[1]+x[5]\big)W_8^2 - \big(x[3]+x[7]\big)W_8^2 \\
&= x_{0+4}-x_{2+6}+x_{1+5}W_8^2 - x_{3+7}W_8^2 = x_{(0+4)-(2+6)} + x_{(1+5)-(3+7)}W_8^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[3] &= x[0]W_8^0 + x[1]W_8^3 + x[2]W_8^6 + x[3]W_8^9 \\
&\quad + x[4]W_8^{12} + x[5]W_8^{15} + x[6]W_8^{18} + x[7]W_8^{21} \\
&= x[0]+x[1]W_8^3 - x[2]W_8^2 + x[3]W_8 \\
&\quad - x[4]-x[5]W_8^3 + x[6]W_8^2 - x[7]W_8 \\
&= \big(x[0]-x[4]\big)+\big(x[1]-x[5]\big)W_8^3 \\
&\quad - \big(x[2]-x[6]\big)W_8^2 + \big(x[3]-x[7]\big)W_8 \\
&= x_{0-4}+x_{1-5}W_8^3 - x_{2-6}W_8^2 + x_{3-7}W_8 \\
&= \left(x_{0-4}-x_{2-6}W_8^2\right)+\left(x_{1-5}-x_{3-7}W_8^2\right)W_8^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[4] &= x[0]W_8^0 + x[1]W_8^4 + x[2]W_8^8 + x[3]W_8^{12} \\
&\quad + x[4]W_8^{16} + x[5]W_8^{20} + x[6]W_8^{24} + x[7]W_8^{28}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x[0]-x[1]+x[2]-x[3]+x[4]-x[5]+x[6]-x[7] \\
&= \left(x[0]+x[4]\right)-\left(x[1]+x[5]\right)+\left(x[2]+x[6]\right)-\left(x[3]+x[7]\right) \\
&= x_{0+4}-x_{1+5}+x_{2+6}-x_{3+7}=x_{(0+4)+(2+6)}-x_{(1+5)+(3+7)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[5] &= x[0]W_8^0+x[1]W_8^5+x[2]W_8^{10}+x[3]W_8^{15} \\
&\quad +x[4]W_8^{20}+x[5]W_8^{25}+x[6]W_8^{30}+x[7]W_8^{35} \\
&= x[0]-x[1]W_8+x[2]W_8^2-x[3]W_8^3 \\
&\quad -x[4]+x[5]W_8-x[6]W_8^2+x[7]W_8^3 \\
&= \left(x[0]-x[4]\right)-\left(x[1]-x[5]\right)W_8 \\
&\quad +\left(x[2]-x[6]\right)W_8^2-\left(x[3]-x[7]\right)W_8^3 \\
&= x_{0-4}-x_{1-5}W_8+x_{2-6}W_8^2-x_{3-7}W_8^3 \\
&= \left(x_{0-4}+x_{2-6}W_8^2\right)-\left(x_{1-5}+x_{3-7}W_8^2\right)W_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[6] &= x[0]W_8^0+x[1]W_8^6+x[2]W_8^{12}+x[3]W_8^{18} \\
&\quad +x[4]W_8^{24}+x[5]W_8^{30}+x[6]W_8^{36}+x[7]W_8^{42} \\
&= x[0]-x[1]W_8^2-x[2]+x[3]W_8^2 \\
&\quad +x[4]-x[5]W_8^2-x[6]+x[7]W_8^2 \\
&= \left(x[0]+x[4]\right)-\left(x[2]+x[6]\right) \\
&\quad -\left(x[1]+x[5]\right)W_8^2+\left(x[3]+x[7]\right)W_8^2 \\
&= x_{0+4}-x_{2+6}-x_{1+5}W_8^2+x_{3+7}W_8^2=x_{(0+4)-(2+6)}-x_{(1+5)-(3+7)}W_8^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X[7] &= x[0]W_8^0+x[1]W_8^7+x[2]W_8^{14}+x[3]W_8^{21} \\
&\quad +x[4]W_8^{28}+x[5]W_8^{35}+x[6]W_8^{42}+x[7]W_8^{49} \\
&= x[0]-x[1]W_8^3-x[2]W_8^2-x[3]W_8 \\
&\quad -x[4]+x[5]W_8^3+x[6]W_8^2+x[7]W_8 \\
&= \left(x[0]-x[4]\right)-\left(x[1]-x[5]\right)W_8^3 \\
&\quad -\left(x[2]-x[6]\right)W_8^2-\left(x[3]-x[7]\right)W_8 \\
&= x_{0-4}-x_{1-5}W_8^3-x_{2-6}W_8^2-x_{3-7}W_8 \\
&= \left(x_{0-4}-x_{2-6}W_8^2\right)-\left(x_{1-5}-x_{3-7}W_8^2\right)W_8^3
\end{aligned}
$$

計算過程如下：

$$
\begin{aligned}
w[1] &= W_8 \\
w[2] &= W_8^2 \\
w[3] &= W_8^3 \\
a[1] &= x[0]+x[4]
\end{aligned}
$$

$$a[2]=x[1]+x[5]$$
$$a[3]=x[2]+x[6]$$
$$a[4]=x[3]+x[7]$$
$$b[1]=a[1]+a[3]=(x[0]+x[4])+(x[2]+x[6])$$
$$b[2]=a[2]+a[4]=(x[1]+x[5])+(x[3]+x[7])$$

$$X[0]=b[1]+b[2]=x_{(0+4)+(2+6)}+x_{(1+5)+(3+7)}$$

$$X[4]=b[1]-b[2]=x_{(0+4)+(2+6)}-x_{(1+5)+(3+7)}$$

$$c[1]=x[0]-x[4]$$
$$c[2]=x[1]-x[5]$$
$$c[3]=x[2]-x[6]$$
$$c[4]=x[3]-x[7]$$
$$d[1]=c[1]+c[3]w[2]=(x[0]-x[4])+(x[2]-x[6])W_8^2$$
$$d[2]=c[2]+c[4]w[2]=(x[1]-x[5])+(x[3]-x[7])W_8^2$$

$$X[1]=d[1]+d[2]w[1]=\left(x_{0-4}+x_{2-6}W_8^2\right)+\left(x_{1-5}+x_{3-7}W_8^2\right)W_8$$

$$X[5]=d[1]-d[2]w[1]=\left(x_{0-4}+x_{2-6}W_8^2\right)-\left(x_{1-5}+x_{3-7}W_8^2\right)W_8$$

$$e[1]=a[1]-a[3]=(x[0]+x[4])-(x[2]+x[6])$$
$$e[2]=a[2]-a[4]=(x[1]+x[5])-(x[3]+x[7])$$

$$X[2]=e[1]+e[2]w[2]=x_{(0+4)-(2+6)}+x_{(1+5)-(3+7)}W_8^2$$

$$X[6]=e[1]-e[2]w[2]=x_{(0+4)-(2+6)}-x_{(1+5)-(3+7)}W_8^2$$

$$f[1]=c[1]-c[3]w[2]=(x[0]-x[4])-(x[2]-x[6])W_8^2$$
$$f[2]=c[2]-c[4]w[2]=(x[1]-x[5])-(x[3]-x[7])W_8^2$$

$$X[3]=f[1]+f[2]w[3]=\left(x_{0-4}-x_{2-6}W_8^2\right)+\left(x_{1-5}-x_{3-7}W_8^2\right)W_8^3$$

$$X[7]=f[1]-f[2]w[3]=\left(x_{0-4}-x_{2-6}W_8^2\right)-\left(x_{1-5}-x_{3-7}W_8^2\right)W_8^3$$

根據以上之計算方式，確實減少了相當多的乘法運算，亦即大幅減輕了計算量，稱得上是快速傅立葉轉換。