SS24. 離散時間傅立葉轉換

利用取樣處理可將 CT 訊號$x(t)$化為 DT 訊號$x_s(t)$，如下所示：

(1) $$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-kT)$$

由於$x(t)\delta(t-kT)=x(kT)\delta(t-kT)$，因此(1)式可改寫為

(2) $$x_s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

取傅立葉轉換後可得

(3) $$\hat{x}_s(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)e^{-jk\omega T}$$

令$x[k]=x(kT)$，$\Omega=\omega T$，則

(4) $$X(\Omega)=\hat{x}_s\left(\frac{\Omega}{T}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}$$

在數學上特稱$X(\Omega)$為離散時間傅立葉轉換(discrete-time Fourier transform)，簡稱為 DTFT，或表為

(5) $$\Im_{DT}\{x[k]\}=X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}$$

由於實際訊號$x[k]\in R$為實數，因此

(6) $$X(\Omega)=Re(X(\Omega))+j\,Im(X(\Omega))$$

其中

(7) $$\begin{aligned}Re(X(\Omega))&=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\left(e^{-jk\Omega}+e^{jk\Omega}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(X(\Omega)+X(-\Omega)\right)=Re(X(-\Omega))\end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned}Im(X(\Omega))&=\frac{j}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\left(e^{-jk\Omega}-e^{jk\Omega}\right)\\&=\frac{j}{2}\left(X(\Omega)-X(-\Omega)\right)=-Im(X(-\Omega))\end{aligned}$$

故$Re(X(\Omega))$為偶函數，$Im(X(\Omega))$為奇函數，根據以上事實可知$X(\Omega)$的量值與相位分別為

(9) $$\left|X(\Omega)\right|=\sqrt{\left[Re\left(X(\Omega)\right)\right]^2+\left[Im\left(X(\Omega)\right)\right]^2}$$
$$=\sqrt{\left[Re\left(X(-\Omega)\right)\right]^2+\left[Im\left(X(-\Omega)\right)\right]^2}=\left|X(-\Omega)\right|$$

(10) $$\angle X(\Omega)=tan^{-1}\left(Im\left(X(\Omega)\right)/Re\left(X(\Omega)\right)\right)$$
$$=-tan^{-1}\left(Im\left(X(-\Omega)\right)/Re\left(X(-\Omega)\right)\right)=-\angle X(-\Omega)$$

故量值$\left|X(\Omega)\right|$為偶函數，相位$\angle X(\Omega)$為奇函數。

若對Ω取下列之積分運算，則

(11) $$\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega=\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}e^{jn\Omega}d\Omega$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}e^{j(n-k)\Omega}d\Omega$$

其中Ω_1為任意實數，而且

(12) $$\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}e^{j(n-k)\Omega}d\Omega=\begin{cases}2\pi & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

因此(11)式可化為

(13) $$\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega=2\pi\cdot x[n]$$

即

(14) $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega$$

根據此式將$x[k]$的 DTFT 反運算定義如下：

(15) $$\Im_{DT}^{-1}\{X(\Omega)\}=x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)e^{jk\Omega}d\Omega$$

稱為反離散時間傅立葉轉換(inverse DTFT)，簡稱為 IDTFT。

今考慮$x[k]_{k\geq 0}$之訊號，將(5)式與 *z*-轉換$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\cdot z^{-k}$相比較，可得

(16) $$X(\Omega)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\cdot z^{-k}\Big|_{z=e^{j\Omega}}=X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

顯然地，*z*-轉換與 DTFT 兩種轉換間存在下列之關係式：(17)　$z=e^{j\Omega}$

利用此關係可知指數訊號$a^k\big|_{k\geq 0}$的 DTFT 如下所示：

(18) $$\Im_{DT}\left\{a^k\right\}_{k\geq 0}=\mathcal{Z}\left\{a^k\right\}\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{z}{z-a}\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-a}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

其收斂範圍為$|z|=\left|e^{j\Omega}\right|>|a|$，由於$\left|e^{j\Omega}\right|=1$，因此(18)式只適用在$|a|<1$之情況，例如$\Im_{DT}\left\{0.5^k\right\}=\dfrac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$，$\Im_{DT}\left\{2^k\right\}$不存在。

令$\Im_{DT}\left\{x[k]\right\}=X(\Omega)$，$\Im_{DT}\left\{y[k]\right\}=Y(\Omega)$，相關的 DTFT 重要性質列舉如下：

[P1] 週期性： $X(\Omega+2\pi)=X(\Omega)$

驗證如下：

(19) $$X(\Omega+2\pi)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{-jk(\Omega+2\pi)}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}=X(\Omega)$$

故 DTFT 具有週期性，週期為2π。

[P2] 線性：$\Im_{DT}\left\{ax[k]+by[k]\right\}=a\Im_{DT}\left\{x[k]\right\}+b\Im_{DT}\left\{y[k]\right\}$

驗證如下：

(20) $$\begin{aligned}\Im_{DT}\left\{ax[k]+by[k]\right\}&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(ax[k]+by[k]\right)e^{-jk\Omega}\\&=a\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{-jk\Omega}+b\sum_{k=0}^{\infty}y[k]e^{-jk\Omega}\\&=a\Im_{DT}\left\{x[k]\right\}+b\Im_{DT}\left\{y[k]\right\}\end{aligned}$$

故 DTFT 具線性運算性質。

[P3] 時間平移：$\Im_{DT}\left\{x[k-m]\right\}==e^{-jm\Omega}X(\Omega)$

驗證如下：

(21) $$\begin{aligned}\Im_{DT}\left\{x[k-m]\right\}&=\sum_{k=0}^{\infty}x[k-m]e^{-jk\Omega}=\sum_{p=-m}^{\infty}x[p]e^{-j(p+m)\Omega}\\&=\sum_{p=0}^{\infty}x[p]e^{-j(p+m)\Omega}=e^{-jm\Omega}\left(\sum_{p=0}^{\infty}x[p]e^{-jp\Omega}\right)\\&=e^{-jm\Omega}X(\Omega)\end{aligned}$$

當訊號的時間平移(time-shifting)時，DTFT 必須乘上$e^{-jm\Omega}$。

[P4] 頻率平移：$\Im_{DT}\left\{e^{-jk\Omega_0}x[k]\right\}=X(\Omega-\Omega_0)$

驗證如下：

(22) $$\Im_{DT}\left\{e^{-jk\Omega_0}x[k]\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-jk\Omega_0}x[k]e^{-jk\Omega}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{-jk(\Omega-\Omega_0)}=X(\Omega-\Omega_0)$$

當訊號乘上$e^{-jk\Omega_0}$，DTFT 會產生Ω_0的頻率平移(frequency shifting)。

[P5] 時域迴旋積： $\Im_{DT}\{x[k]*y[k]\}=X(\Omega)Y(\Omega)$

驗證如下：

定義$x[k]$與$y[k]$的迴旋積(convolution)為

(23) $$x[k]*y[k]=\sum_{m=0}^{\infty}x[k-m]y[m]$$

則

(24) $$\Im_{DT}\{x[k]*y[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x[k]*y[k]\right)e^{-jk\Omega}$$
$$=\sum_{k-m=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x[k-m]y[m]e^{-jk\Omega}\Big|_{n=k-m}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x[n]y[m]e^{-j(n+m)\Omega}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]e^{-jn\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}y[m]e^{-jm\Omega}=X(\Omega)\ Y(\Omega)$$

故兩訊號執行迴旋積運算時，其結果的 DTFT 等於兩訊號個別的 DTFT 乘積。

[P6] 頻域迴旋積： $\Im_{DT}\{x[k]y[k]\}=\frac{1}{2\pi}X(\Omega)*Y(\Omega)$

驗證如下：

(25) $$\Im_{DT}\{x[k]y[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x[k]y[k]\right)e^{-jk\Omega}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda\right)y[k]e^{-jk\Omega}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}y[k]e^{jk(\lambda-\Omega)}d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\lambda)Y(\lambda-\Omega)d\lambda=\frac{1}{2\pi}X(\Omega)*Y(\Omega)$$

故兩訊號乘積的 DTFT 等於兩訊號 DTFT 迴旋積的$\frac{1}{2\pi}$倍。

對一般時域訊號$x[k]\in R$而言，其總能量計算如下：

$$\begin{aligned}(26)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}x^2[k]&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)e^{jk\Omega}d\Omega\right)x[k]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)\left(\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{jk\Omega}\right)d\Omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1}^{\Omega_1+2\pi}X(\Omega)X(-\Omega)d\Omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(\Omega)\right|^2d\Omega\end{aligned}$$

此式為 DTFT 的帕塞瓦爾定理(Parseval’s theorem)。

若$x[k]$具有週期N，即$x[k]=x[k+N]$，再令

$$(27)\qquad x_0[k]=\begin{cases}x[k],\ 0\le k\le N-1\\ 0,\qquad 其他\end{cases}$$

則可得

$$(28)\qquad \Im_{DT}\{x_0[k]\}=X_0(\Omega)=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-jk\Omega}$$

由於

$$x[k]=x_0[k]*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[k-nN]$$

因此根據[P5]可得

$$\begin{aligned}(29)\qquad \Im_{DT}\{x[k]\}=X(\Omega)&=X_0(\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Im_{DT}\{\delta[k-nN]\}\\&=X_0(\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[k-nN]e^{-jk\Omega}=X_0(\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jnN\Omega}\end{aligned}$$

再根據脈衝波序的傅立葉級數可知

$$(30)\qquad \delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk\frac{2\pi}{T}t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}$$

若將此式中變數t與T替換為Ω與$\dfrac{2\pi}{N}$，則可得

$$(31)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jnN\Omega}=\frac{2\pi}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{N}\right)$$

代入(29)式成為

(32) $$X(\Omega)=\frac{2\pi}{N}X_0(\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{N}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_0(\Omega)\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{N}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_0\left(n\frac{2\pi}{N}\right)\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{N}\right)$$

觀察此式可知

(33) $$X(\Omega)_{\Omega\neq n\frac{2\pi}{N}}=0$$

(34) $$X\left(n\frac{2\pi}{N}\right)=\frac{2\pi}{N}X_0\left(n\frac{2\pi}{N}\right)$$

又因為 $X(\Omega)$ 具有週期 2π，所以

(35) $$X\left(n\frac{2\pi}{N}\right)=X\left(n\frac{2\pi}{N}+2m\pi\right)_{m\in Z}=X\left((n+mN)\frac{2\pi}{N}\right)_{m\in Z}$$

亦即 $X\left(n\frac{2\pi}{N}\right)$ 具有週期 N。

再根據 IDTFT 可得

(36) $$\Im_{DT}^{-1}\{X(\Omega)\}=x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{jk\Omega}d\Omega$$

利用(32)式可將(36)式改寫為

(37) $$x[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_0\left(n\frac{2\pi}{N}\right)\int_0^{2\pi}\delta\left(\Omega-n\frac{2\pi}{N}\right)e^{jk\Omega}d\Omega$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_0\left(n\frac{2\pi}{N}\right)e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$

再由(34)式可得

(38) $$x[k]=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(n\frac{2\pi}{N}\right)e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$

結論如下：

若 $x[k]$ 具有週期 N，則

(39) $$\Im_{DT}\{x[k]\}=X\left(n\frac{2\pi}{N}\right)=\frac{2\pi}{N}X_0\left(n\frac{2\pi}{N}\right)$$

也是離散型且具有週期 N，其中

(40) $$X_0\left(n\frac{2\pi}{N}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-jk\Omega}\Bigg|_{\Omega=n\frac{2\pi}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

而 $X(\Omega)\big|_{\Omega=n\frac{2\pi}{N}}$ 的 IDTFT 為

(41) $$\Im_{DT}^{-1}\{X(\Omega)\}=x[k]=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(n\frac{2\pi}{N}\right)e^{jkn\frac{2\pi}{N}}$$

後續探討的離散傅立葉轉換(discrete Foutier transform，簡稱 DFT)將會利用到以上之觀念。