SS23. 系統離散化與 *z*-轉換

現今訊號處理已經朝數位化發展，並且廣泛應用到各類工程問題中，例如語音與影像技術，不過在了解數位化之前，必須先清楚 CT 系統的離散化(discretization)的過程，這也是以下所要探討的主要議題。

所謂離散時間系統(discrete-time system，簡稱 DT 系統)是指由 CT 系統經離散化後所得到的系統，底下說明離散化的過程：

考慮一個 n 階 LTI 的 CT 系統，表示式如下所示：

(1) $$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

(2) $$y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)+du(t)$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 為狀態向量(state vector)，依據微分方程式之解法可求得

(3) $$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau$$

其中 t_0 為起始時間，離散化時通常採用零階保持電路，亦即每隔 T 秒輸入一個固定值，即 $u(t)=u(kT)$，$kT\le t<(k+1)T$，k=0,1,2,…，若將(3)式應用在每一個時段 $kT\le t<(k+1)T$，則起始點為 $t_0=kT$，當經過 T 秒後，即 $t=(k+1)T$ 時，可得

(4) $$\begin{aligned}\boldsymbol{x}((k+1)T)&=e^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{\boldsymbol{A}((k+1)T-\tau)}\boldsymbol{b}u(kT)\,d\tau\\&=e^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT)+\left(\int_{kT}^{(k+1)T}e^{\boldsymbol{A}((k+1)T-\tau)}\boldsymbol{b}\,d\tau\right)u(kT)\end{aligned}$$

定義 $\boldsymbol{x}[k]=\boldsymbol{x}(kT)$，$u[k]=u(kT)$，則(4)式可表為離散化之型式如下：

(5) $$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{A}_T\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{b}_Tu[k]$$

其中 $\boldsymbol{A}_T=e^{\boldsymbol{A}T}$，$\boldsymbol{b}_T=\int_{kT}^{(k+1)T}e^{\boldsymbol{A}((k+1)T-\tau)}\boldsymbol{b}\,d\tau$，此外，在 $t=kT$ 時取得輸出 $y[k]=y(kT)$，可得輸出方程式為

(6) $$y[k]=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}[k]+du[k]$$

由於取樣時間通常很小，即 $T\ll 1$，讓取樣頻率遠高於奈奎斯特速率，因此

(7) $$\boldsymbol{A}_T=e^{\boldsymbol{A}T}\approx\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}T$$

(8) $$\boldsymbol{b}_T=\int_{kT}^{(k+1)T}e^{\boldsymbol{A}((k+1)T-\tau)}\boldsymbol{b}\,d\tau=e^{\boldsymbol{A}(k+1)T}\left(\int_{kT}^{(k+1)T}e^{-\boldsymbol{A}\tau}d\tau\right)\boldsymbol{b}$$

$$\approx\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}T\right)\boldsymbol{b}T\approx\boldsymbol{b}T$$

在$T\ll 1$的情況下，$\boldsymbol{A}_T$的特徵方程式為

(9) $$p(\lambda_T)=\left|\lambda_T\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_T\right|\approx\left|(\lambda_T-1)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}T\right|=T\left|\left(\frac{\lambda_T-1}{T}\right)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|$$

其中λ_T為$\boldsymbol{A}_T$的特徵值，令$\boldsymbol{A}$的特徵值為λ_A，則由$p(\lambda_T)=0$可知

(10) $$\left|\left(\frac{\lambda_T-1}{T}\right)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\left|\lambda_A\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=0$$

故

(11) $$\lambda_A=\frac{\lambda_T-1}{T}$$

亦即

(12) $$\lambda_T=1+T\lambda_A$$

若原 CT 系統為穩定系統，則$Re(\lambda_A)<0$，使得

(13) $$\begin{aligned}\left|\lambda_T\right|&=\left|1+T\left(Re(\lambda_A)+j\,Im(\lambda_A)\right)\right|\\&=\sqrt{\left(1+T\,Re(\lambda_A)\right)^2+\left(T\,Im(\lambda_A)\right)^2}\\&=\sqrt{1+2T\,Re(\lambda_A)+\left|\lambda_A\right|T^2}\approx\sqrt{1+2T\,Re(\lambda_A)}<1\end{aligned}$$

也就是說，當原 CT 系統為穩定時，經離散化後之 DT 系統所擁有的特徵值λ_T必須落在複數平面的單位圓內，即$\left|\lambda_T\right|<1$。

後續為了方便，仍將(5)式之狀態方程式表示為

(14) $$\boldsymbol{x}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k]+\boldsymbol{b}u[k]$$

不過切勿與 CT 系統在(1)式中的$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{b}$相混淆。

由(14)式可知離散系統的特徵多項式為

(15) $$p(\lambda)=\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

根據凱雷-漢米爾頓定理可得

(16) $$p(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

接著計算下列之數學式：

(17) $$y[k]+a_{n-1}y[k-1]+\cdots+a_1y[k-(n-1)]+a_0y[k-n]$$

其中 $y[k-m]_{m=0,1,\dots,n-1}$ 可利用(6)與(14)兩式求得，如下所示：

(18)
$$\begin{aligned}
y[k-m]&=\boldsymbol{cx}[k-m]+du[k-m]\\
&=\boldsymbol{cAx}[k-m-1]+\boldsymbol{cb}u[k-m-1]+du[k-m]\\
&=\boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{x}[k-m-2]+\boldsymbol{cAb}u[k-m-2]+\boldsymbol{cb}u[k-m-1]+du[k-m]\\
&=\cdots\ \cdots\\
&=\boldsymbol{cA}^{n-m}\boldsymbol{x}[k-n]+\sum_{p=0}^{n-m-1}\boldsymbol{cA}^p\boldsymbol{b}u[k-m-p-1]+du[k-m]
\end{aligned}$$

代入(17)式後可得

(19)
$$\begin{aligned}
&y[k]+a_{n-1}y[k-1]+\cdots+a_1y[k-(n-1)]+a_0y[k-n]\\
&=\boldsymbol{cA}^n\boldsymbol{x}[k-n]+\sum_{p=0}^{n-1}\boldsymbol{cA}^p\boldsymbol{b}u[k-p-1]+du[k]\\
&\quad+\boldsymbol{c}a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}[k-n]+\sum_{p=0}^{n-2}a_{n-1}\boldsymbol{cA}^p\boldsymbol{b}u[k-p-2]+a_{n-1}du[k-1]\\
&\quad+\ \cdots\ \cdots\\
&\quad+\boldsymbol{c}a_1\boldsymbol{Ax}[k-n]+a_1\boldsymbol{cb}u[k-n]+a_1du[k-n+1]\\
&\quad+\boldsymbol{c}a_0\boldsymbol{x}[k-n]+a_0du[k-n]\\
&=\boldsymbol{c}\underbrace{\left(\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}\right)}_{=\boldsymbol{0}}\boldsymbol{x}[k-n]\\
&\quad+b_nu[k]+b_{n-1}u[k-1]+\cdots+b_1u[k-(n-1)]+b_0u[k-n]
\end{aligned}$$

亦即

(20)
$$\begin{aligned}
&y[k]+a_{n-1}y[k-1]+\cdots+a_1y[k-(n-1)]+a_0y[k-n]\\
&=b_nu[k]+b_{n-1}u[k-1]+\cdots+b_1u[k-(n-1)]+b_0u[k-n]
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&b_n=d\ ,\ \ b_{n-1}=a_{n-1}d+\boldsymbol{cb}\ ,\\
&b_{n-m}\big|_{m=2,3,\dots,n}=a_{n-m}d+\sum_{k=1}^{m-1}a_{n-k}\boldsymbol{cA}^{m-k-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{cA}^{m-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

處理(20)式之 DT 系統時，通常使用 z-轉換(z-transform)，定義 DT 訊號 $x[k]_{k=0,1,\dots,\infty}$ 之 z-轉換如下：

(21) $$\mathscr{Z}\{x[k]\}=X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}$$

其中 $z\in C$ 為複數變數，而且級數 $\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}$ 必須收斂，亦即 z 存在一個收斂範圍使得 $X(z)<\infty$。

接著說明 z-轉換與拉式轉換之關聯性，首先考慮 $x(t)$，且令 $x(t)\big|_{t<0}=0$，若 $x(t)$ 之脈衝取樣訊號為 $x_s(t)$，則

(22) $$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-kT)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\delta(t-kT)$$

取拉式轉換可得

(23) $$X_s(s)=\mathcal{L}\{x_s(t)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\mathcal{L}\{\delta(t-kT)\}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]e^{-ksT}$$

亦即

(24) $$X_s(s)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\left(e^{sT}\right)^{-k}$$

比較(21)與(24)兩式可知

(25) $$X_s(s)=X(z)\big|_{z=e^{sT}}$$

故 z 與 s 之關係式為

(26) $$z=e^{sT}$$

此式顯示 s−平面的 $j\omega$軸對應到 z−平面的單位圓，而 s−平面的左半面則會對應到 z−平面的單位圓內部，如圖 1 所示，此外在 z−平面的單位圓軌跡每繞一圈(由點 C 逆時針方向繞回點 C)，對應到 s−平面的軌跡會在 $j\omega$軸上移動 $2\pi T$ 的長度，例如從$-\pi T$ 到πT(由點 C 向上至點 C)。

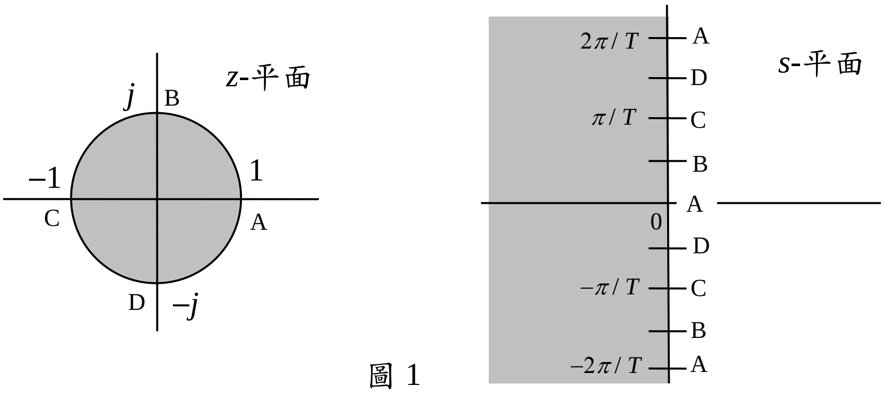

圖 1

接著介紹一些常見的 z-轉換：

[A1] $\mathcal{Z}\{\delta[k]\}=1$

[A2] $\mathcal{Z}\{a^k\}=\dfrac{z}{z-a},\quad |z|>a$

[A3] $\mathcal{Z}\{1\}=\dfrac{z}{z-1},\quad |z|>1$

[A4] $\mathcal{Z}\{e^{\alpha k}\}=\dfrac{z}{z-e^{\alpha}},\quad |z|>e^{\alpha}$

[A5] $\mathcal{Z}\{e^{\alpha}\cos\beta k\}=\dfrac{z^2-ze^{\alpha}\cos\beta}{z^2-2ze^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}},\quad |z|>e^{\alpha}$

[A6] $\mathcal{Z}\{e^{\alpha}\sin\beta k\}=\dfrac{ze^{\alpha}\sin\beta}{z^2-2ze^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}},\quad |z|>e^{\alpha}$

[A7] $\mathcal{Z}\{\cos\beta k\}=\dfrac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1},\quad |z|>1$

[A8] $\mathcal{Z}\{\sin\beta k\}=\dfrac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1},\quad |z|>1$

[A9] $\mathcal{Z}\{k\}=\dfrac{z}{(z-1)^2},\quad |z|>1$

驗證[A1]，由於

(27) $$\delta[k]=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

因此 z−轉換為

(28) $$\mathcal{Z}\{\delta[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[k]z^{-k}=\delta[0]z^{-0}=1$$

驗證[A2]，由於指數訊號為 a^k ，a>0，因此 z−轉換為

(29) $$\mathcal{Z}\{a^k\}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

此式必須滿足 $|z|>a$ ，即收斂範圍為 $|z|>a$ 。

驗證[A3]，由於步階訊號 $s[k]=1$ 可視為指數訊號 a^k 的特例，即 a=1，因此步階

訊號$s[k]=1$的 z−轉換為

(30) $$\mathcal{Z}\{s[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}1^k z^{-k}=\frac{z}{z-1}$$

收斂範圍是$|z|>1$。

驗證[A4]，由於指數訊號$e^{\alpha k}=\left(e^{\alpha}\right)^k$，也可視為$a^k$的特例，即$a=e^{\alpha}\big|_{\alpha\in R}$，因此$e^{\alpha k}$的 z−轉換為

(31) $$\mathcal{Z}\{e^{\alpha k}\}=\frac{z}{z-e^{\alpha}}$$

收斂範圍是$|z|>e^{\alpha}$。

驗證[A5]與[A6]，首先考慮複數指數訊號$e^{(\alpha+j\beta)k}$，由於$e^{(\alpha+j\beta)k}=\left(e^{\alpha+j\beta}\right)^k$，也可視為$a^k$的特例，即$a=e^{\alpha+j\beta}\big|_{\alpha,\beta\in R}$，因此$e^{(\alpha+j\beta)k}$的 z−轉換為

(32) $$\mathcal{Z}\left\{e^{(\alpha+j\beta)k}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{(\alpha+j\beta)k}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{\alpha+j\beta}z^{-1}\right)^k=\frac{z}{z-e^{\alpha+j\beta}}$$

收斂範圍是$|z|>\left|e^{\alpha+j\beta}\right|=e^{\alpha}$，又因為

(33) $$\mathcal{Z}\left\{e^{(\alpha+j\beta)k}\right\}=\mathcal{Z}\left\{e^{\alpha k}\cos\beta k\right\}+j\mathcal{Z}\left\{e^{\alpha k}\sin\beta k\right\}$$

(34) $$\frac{z}{z-e^{\alpha+j\beta}}=\frac{z\left(z-e^{\alpha-j\beta}\right)}{\left(z-e^{\alpha+j\beta}\right)\left(z-e^{\alpha-j\beta}\right)}=\frac{z^2-ze^{\alpha}\cos\beta+jze^{\alpha}\sin\beta}{z^2-2ze^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$$

所以比較以上兩式之實部與虛部可得

(35) $$\mathcal{Z}\left\{e^{\alpha}\cos\beta k\right\}=\frac{z^2-ze^{\alpha}\cos\beta}{z^2-2ze^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$$

(36) $$\mathcal{Z}\left\{e^{\alpha}\sin\beta k\right\}=\frac{ze^{\alpha}\sin\beta}{z^2-2ze^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$$

故[A5]與[A6]確實成立。

驗證[A7]與[A8]，由於這兩式是[A5]與[A6]的特例，令$\alpha=0$則可得

(37) $$\mathcal{Z}\{\cos\beta k\}=\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$$

(38) $$\mathcal{Z}\{sin\,\beta k\}=\frac{z\,sin\,\beta}{z^2-2z\,cos\,\beta+1}$$

收斂範圍是$|z|>1$。

驗證[A9]，在此式中之$r[k]=k$為斜坡訊號，其 z−轉換表為

(39) $$\mathcal{Z}\{k\}=\sum_{k=0}^{\infty}kz^{-k}$$

接著計算下式：

(40) $$\begin{aligned}z\mathcal{Z}\{k\}-\mathcal{Z}\{k\}&=\sum_{k=0}^{\infty}kz^{-k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}kz^{-k}\\&=\left(1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+\cdots\right)-\left(z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots\right)\\&=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\cdots=\frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

此式必須滿足$|z|>1$，若再進一步整理，則可得

(41) $$\mathcal{Z}\{k\}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

收斂範圍是$|z|>1$。

事實上，z−轉換還具有線性與時序平移兩項重要運算，分別如下所示：

(42) $$\mathcal{Z}\{ax[k]+by[k]\}=a\mathcal{Z}\{x[k]\}+b\mathcal{Z}\{y[k]\}$$

(43) $$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[k-m]\}&=\sum_{k=0}^{\infty}x[k-m]z^{-k}=\sum_{p=-m}^{\infty}x[p]z^{-(p+m)}\\&=\sum_{p=0}^{\infty}x[p]z^{-(p+m)}=z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}=z^{-m}\mathcal{Z}\{x[k]\}\end{aligned}$$

利用以上兩種運算於(20)式之 DT 系統可得

(44) $$\begin{aligned}&Y(z)+a_{n-1}z^{-1}Y(z)+\cdots+a_1z^{-(n-1)}Y(z)+a_0z^{-n}Y(z)\\&=b_nU(z)+b_{n-1}z^{-1}U(z)+\cdots+b_1z^{-(n-1)}U(z)+b_0z^{-n}U(z)\end{aligned}$$

其中$\mathcal{Z}\{y[k]\}=Y(z)$，$\mathcal{Z}\{u[k]\}=U(z)$，經整理後可得轉移函數如下：

(45) $$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\cdots+b_1z^{-(n-1)}+b_0z^{-n}}{1+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_1z^{-(n-1)}+a_0z^{-n}}$$

或者是

(46) $$H(z)=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

其分母即系統之特徵多項式，表為

(47) $$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$

根據特徵方程式 $p(z)=0$ 可求得的 n 個極點，這些極點的位置與系統的穩定性息息相關。對於穩定的 CT 系統 $H(s)$ 而言，其極點都必須落在 s−平面的左半面，由(26)式的對應關係 $z=e^{sT}$ 可推得：若 $H(z)$ 為穩定的 DT 系統，則所有的極點都必須落在 z−平面的單位圓內。

在數學上已經證明反 z-轉換(inverse z-transform)如下所示：

(48) $$x(k)=\mathscr{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\,z^{k-1}dz$$

其中積分迴圈 C 必須落在 $X(z)$ 的收斂範圍，此式之證明請參考複變教材。