

## SS22. 取樣與調變

後續所要探討的則是離散型(discrete type)的訊號與系統，首先介紹的是離散時間訊號(discrete-time signal，簡稱 DT 訊號)，此類訊號是經由連續時間(CT)訊號的取樣(sampling)而得，在理論上是採用理想型的脈衝取樣(impulse sampling)，如下所示：

$$(1) \quad x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

其中  $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$  稱為脈衝波列(impulse train)，每隔一個週期  $T$  出現一個脈衝，因此  $\delta_T(t)$  是屬於週期訊號，可表為傅立葉級數如下：

$$(2) \quad \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

稱  $T$  為取樣週期(sampling period)， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  為取樣頻率(sampling frequency)，且係數為

$$(3) \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

圖 1 為脈衝取樣之示意圖。

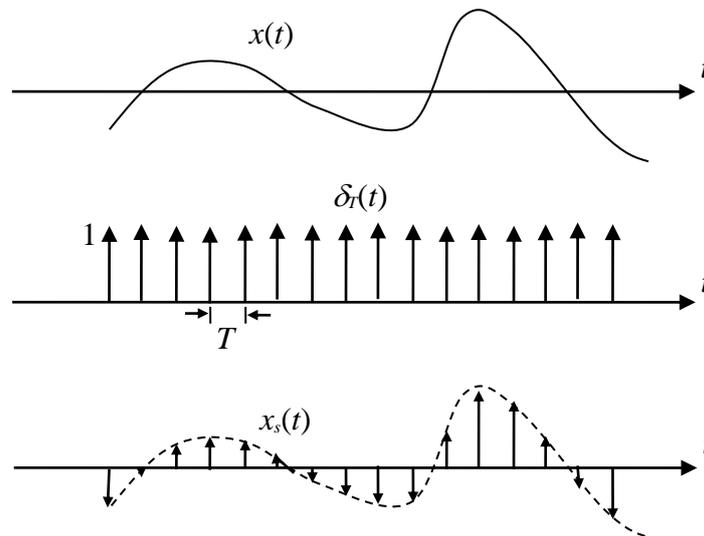


圖 1

由(1)~(3)式可得

$$(4) \quad x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} x(t) e^{jk\omega_0 t}$$

再經傅立葉轉換化為

$$(5) \quad \hat{x}_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega - k\omega_0)$$

假設  $x(t)$  是一個有限頻段(band-limited)的訊號，滿足  $\hat{x}(\omega)|_{|\omega|>\omega_b} = 0$ ，稱此訊號之頻寬(bandwidth)為  $\omega_b$ ，為了方便說明，以圖 2 之訊號為例，當取樣頻率高於 2 倍頻寬時，即  $\omega_0 \geq 2\omega_b$ ，可得  $\hat{x}_s(\omega)$  如圖 3 所示，當取樣頻率小於 2 倍頻寬時，即  $\omega_0 < 2\omega_b$ ，可得  $\hat{x}_s(\omega)$  如圖 4 所示。

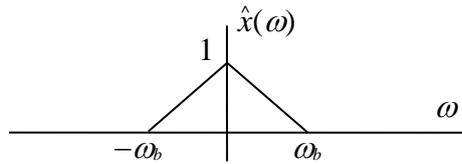


圖 2

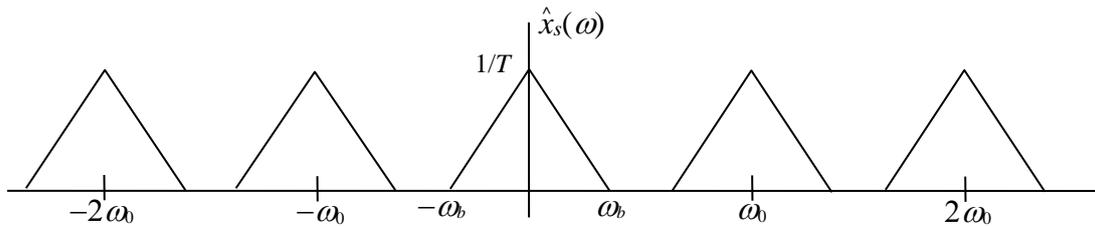


圖 3

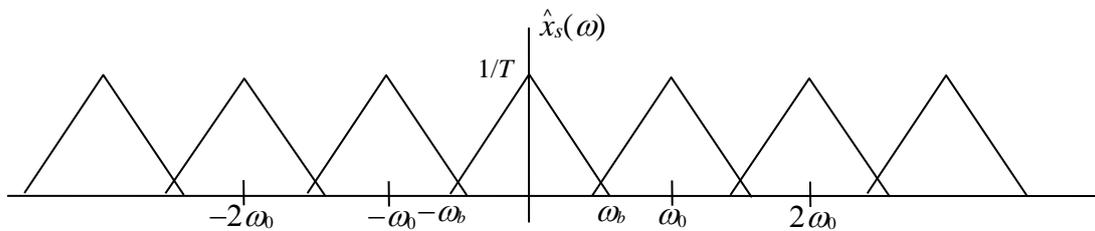


圖 4

當  $\omega_0 \geq 2\omega_b$  時，從圖 3 中可知  $\hat{x}_s(\omega)|_{|\omega| \leq \omega_b} = \frac{1}{T} \hat{x}(\omega)$ ，若將  $\hat{x}(\omega)$  輸入理想型的低通濾波器  $H(j\omega)$ ，則輸出為  $H(j\omega)\hat{x}_s(\omega) = \hat{x}(\omega)$ ，如圖 5 所示，故原輸入訊號  $\hat{x}(\omega)$  可被完整地過濾出來。

當  $\omega_0 < 2\omega_b$  時，從圖 4 中可知  $\hat{x}_s(\omega)$  會產生訊號之混疊(aliasing)現象，其結果造成  $\hat{x}_s(\omega)|_{|\omega| \leq \omega_b} \neq \frac{1}{T} \hat{x}(\omega)$ ，即使利用理想型之低通濾波器  $H(j\omega)$  亦無法將  $\hat{x}(\omega)$  完整濾出，如圖 6 所示。

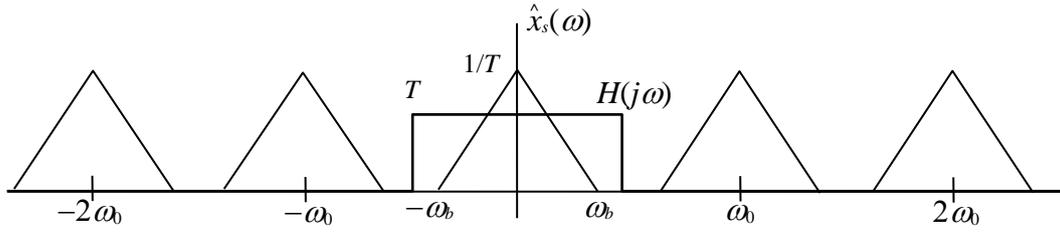


圖 5

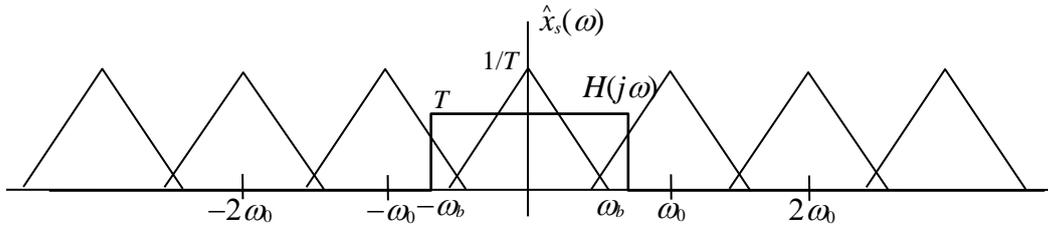


圖 6

由以上之分析可知 CT 訊號  $x(t)$  經由脈衝取樣所得的 DT 訊號  $x_s(t)$ ，若取樣頻率至少為  $x(t)$  之頻寬的兩倍，亦即  $\omega_0 \geq 2\omega_b$ ，在此條件下才能利用低通濾波器將  $x_s(t)$  還原為  $x(t)$ ，這就是著名的夏農取樣定理(Shannon's sampling theorem)，而兩倍頻寬  $2\omega_b$  則稱為奈奎斯特速率(Nyquist rate)。

在實際的情況下，理想型的脈衝取樣是不可能實現的，但可採用近似的取樣方法，例如脈波調變(pulse modulation)：

$$(6) \quad x_p(t) = x(t)p(t)$$

稱  $p(t)$  為脈波波列(pulse train)，脈波寬度為  $\tau$ ，振幅為 1，取樣週期為  $T$ ，傅立葉級數如下所示：

$$(7) \quad p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

其中  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  為取樣頻率，若  $p(t)|_{|t| \leq \tau/2} = 1$ ，則係數為

$$(8) \quad c_k = \frac{1}{T} \int_T p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \text{sinc} \frac{k\omega_0 \tau}{2}$$

其中  $c_0 = \frac{\tau}{T}$ ，圖 7 為脈波調變之示意圖。

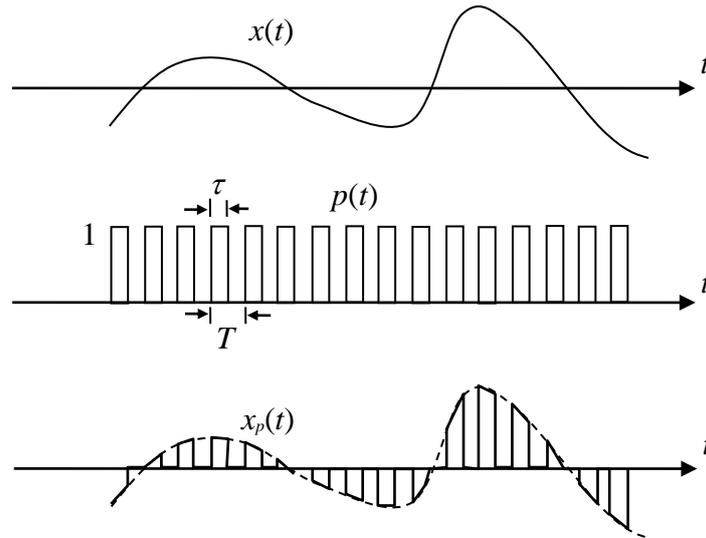


圖 7

由(6)與(7)兩式可得

$$(9) \quad x_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(t) e^{jk\omega_0 t}$$

其傅立葉轉換為

$$(10) \quad \hat{x}_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \hat{x}(\omega - k\omega_0) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{k\omega_0 \tau}{2} \hat{x}(\omega - k\omega_0)$$

仍然令  $x(t)$  是一個有限頻寬(band-limited)的訊號，如圖 2 所示，當  $\omega_0 \geq 2\omega_b$ ，即取樣頻率至少為 2 倍頻寬時， $\hat{x}_p(\omega)$  如圖 8 所示，當  $\omega_0 < 2\omega_b$  時， $\hat{x}_p(\omega)$  如圖 9 所示。顯然地，當  $\omega_0 \geq 2\omega_b$  時，從圖 8 中可知  $\hat{x}_s(\omega)|_{|\omega| \leq \omega_b} = \frac{1}{c_0} \hat{x}(\omega)$ ，若使用理想型低通濾波器  $H(j\omega)$ ，則可將  $\hat{x}(\omega)$  完整地過濾出來；但是當  $\omega_0 < 2\omega_b$  時，從圖 9 中可知  $\hat{x}_s(\omega)|_{|\omega| \leq \omega_b} \neq \frac{1}{c_0} \hat{x}(\omega)$ ，會產生訊號之混疊(aliasing)現象，即使使用理想型低通濾波器  $H(j\omega)$  也無法將  $\hat{x}(\omega)$  完整濾出。

由以上之分析可知 CT 訊號  $x(t)$  也可經由脈波取樣與低通濾波器來做還原處理，夏農取樣定理仍然適用。

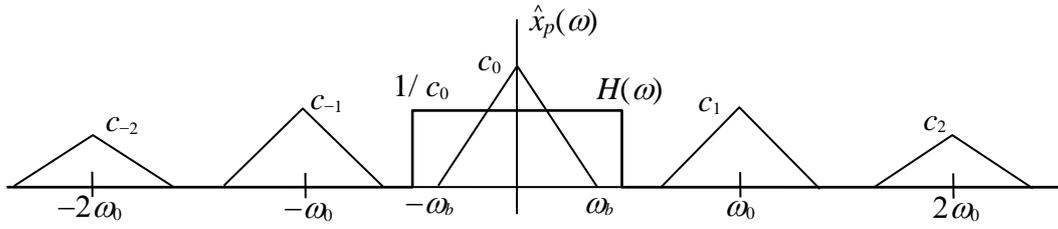


圖 8

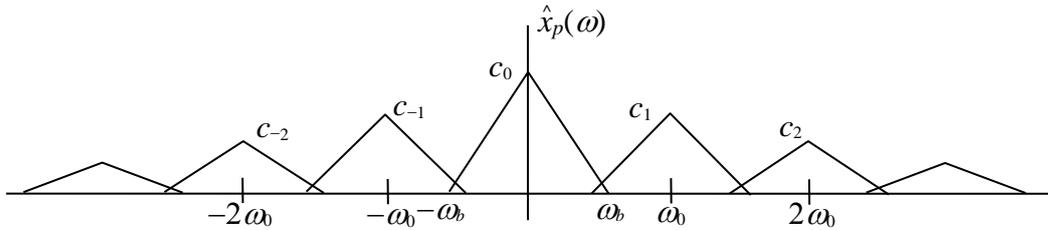


圖 9

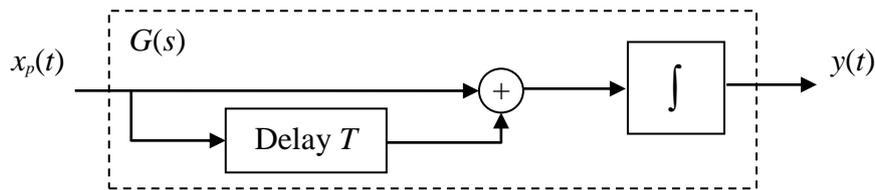


圖 10

在實務上當然無法使用理想型的低通濾波器，不過仍可將脈波調變訊號  $x_p(t)$  通過零階保持電路(zero-order holding circuit，簡稱 ZOH 電路)來取得近似的  $x(t)$ ，ZOH 電路之方塊圖如圖 10 所示，轉移函數為

$$(11) \quad G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

圖 11 為使用零階保持電路之示意圖，其中  $x_{zoh}(t)$  為  $x(t)$  的近似結果。

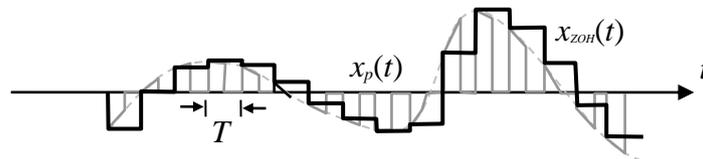


圖 11