SS21. 系統數學模式化—狀態空間描述法

在系統工程領域中，系統可歸類為線性(linear)與非線性(nonlinear)兩種型態，而在線性系統中，最常面對的是線性非時變(linear time invariant, LTI)系統，一般的 LTI 系統的數學模式除了可以用 ODE-CC 來描述輸出-輸入之關係外，也可使用狀態空間描述法(state-space description)，事實上，這種時域描述法包括狀態方程式(state equation)與輸出方程式(output equation)，這兩種方程式正是狀態空間描述法的基本架構。

先以二階的 LTI 系統為例，通常狀態方程式與輸出方程式如下所示：(1)

$$\dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+b_1u(t),\qquad x_1(0)=x_{10}$$

(2) $$\dot{x}_2(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+b_2u(t),\qquad x_2(0)=x_{20}$$

$y(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+du(t)$圖 1 即為此系統之方塊圖。

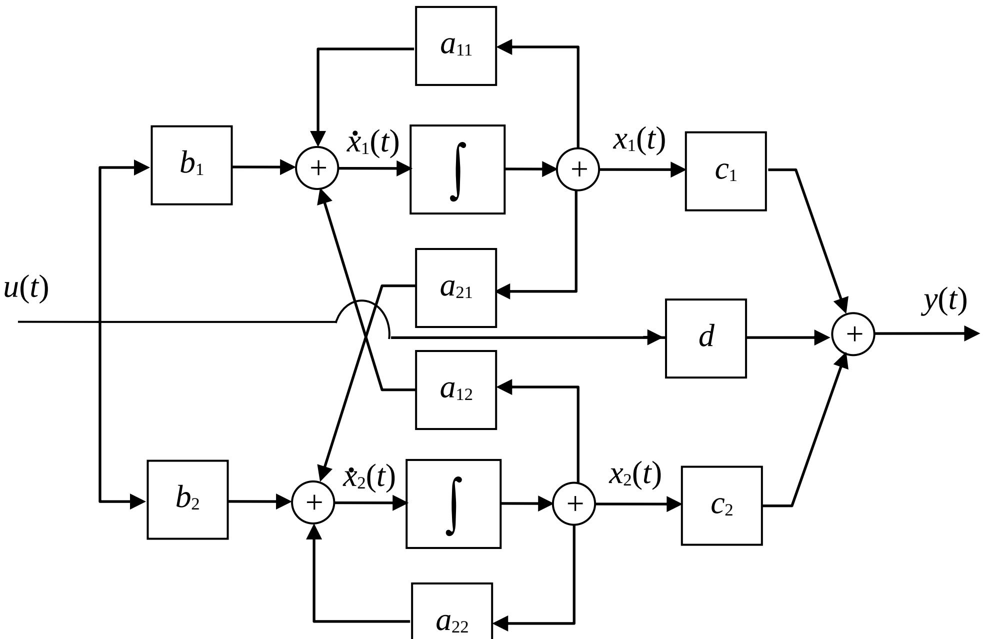


圖 1

最常見的狀態空間描述法是以矩陣型式將(1)~(3)式表為

(4) $$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}u(t),\qquad \underbrace{\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(0)}=\underbrace{\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_0}$$

(5) $$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+du(t)$$

亦即

(6) $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t), \qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

(7) $y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)+du(t)$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=\left[x_1(t)\ x_2(t)\right]^T$ 為狀態向量(state vector)，圖 2 所示為矩陣型式之系統方塊圖。

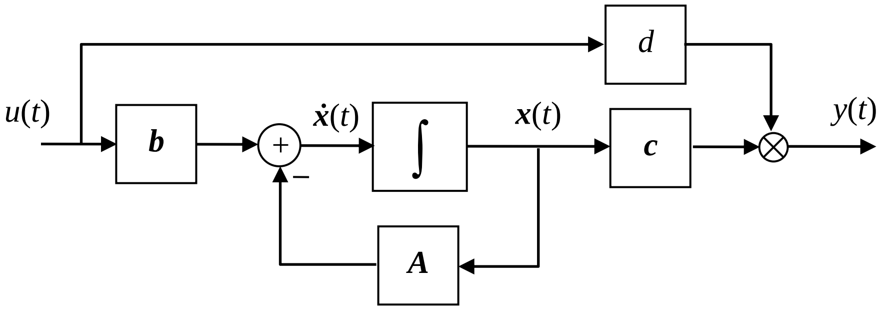


圖 2

根據微分方程原理，求解(6)式可得狀態向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 如下所示：

(8) $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau$

代入(7)式後，輸出為

(9) $y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)+du(t)=\boldsymbol{c}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{c}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau+du(t)$

雖然 $\boldsymbol{x}(t)$ 與 $y(t)$ 可經由以上兩式求得，但是積分的計算並不容易，目前大都是以模擬軟體做數值運算，其中 MATLAB 就是工程上常用的模擬軟體，以下列之二階系統為例：

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=x_2(t), && x_1(0)=1\\
&\dot{x}_2(t)=-3x_1(t)-4x_2(t)+u(t), && x_2(0)=0\\
&y(t)=2x_1(t)-x_2(t)
\end{aligned}$$

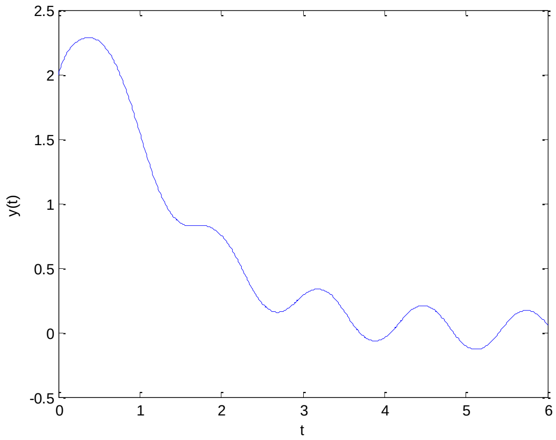
其中 $u(t)=sin(cos\,5t)$。

```
==========================================

Create m-file: second.m
   function dx=second(t,x)
   dx=zeros(2,1);
   dx(1)=x(2);
   dx(2)=-3*x(1)-4*x(2)+sin(cos(5*t));

   >> % key in the following instructions
```

```
>> [t,x]=ode45(@second,[0:0.01:6],[1 0])
>> y=2*x(:,1)-x(:,2);
>> plot(t,y); xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



==

接著驗證(8)式中的狀態向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 確實滿足(6)式之狀態方程式，首先 $\boldsymbol{x}(t)$ 對 t 微分可得

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \left(\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}\right)\boldsymbol{x}_0 + e^{\boldsymbol{A}(t-t)}\boldsymbol{b}u(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\right)\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau \\ &= \left(\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}\right)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}u(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\right)\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

此計算利用到 SS01 中所介紹過的”双變數跑動式積分的微分”，由於

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} &= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3 + \cdots\right) \\ &= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3 t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^4 t^3 + \cdots \\ &= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3 + \cdots\right) = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\end{aligned}$$

同理可得

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$$

將以上兩式代入(10)式成為

$$\text{(13)} \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{A}\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau$$

$$= \boldsymbol{A}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\,d\tau\right) + \boldsymbol{b}u(t)$$
$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

如(6)式所示，故得證。

若 LTI 系統是以(6)與(7)兩式為數學模式，則一般是利用凱雷-漢米爾頓原理(Cayley-Hamilton theorem)來推導所相對應的 ODE-CC。

根據系統矩陣 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 求得相對應的特徵多項式如下：

(14) $$p(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

亦即

(15) $$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

其中 $\alpha_1 = -(a_{11} + a_{22})$，$\alpha_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，根據凱雷-漢米爾頓原理可知

(16) $$p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

接著參考(15)式之型式寫出相對應之數學式：

(17) $$\ddot{y}(t) + \alpha_1\dot{y}(t) + \alpha_0 y(t)$$

其中

(18) $$y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$

(19) $$\dot{y}(t) = \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + d\dot{u}(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}u(t) + d\dot{u}(t)$$

(20) $$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}\dot{u}(t) + d\ddot{u}(t) \\ &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}\dot{u}(t) + d\ddot{u}(t)\end{aligned}$$

代入(17)式可得

(21) $$\begin{aligned}&\ddot{y}(t) + \alpha_1\dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) \\ &= \boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{A}^2 + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_0\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}(t) + d\ddot{u}(t) \\ &\quad + (\boldsymbol{c}\boldsymbol{b} + \alpha_1 d)\dot{u}(t) + (\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} + \alpha_1\boldsymbol{c}\boldsymbol{b} + \alpha_0 d)u(t)\end{aligned}$$

由凱雷-漢米爾頓原理可知 $\boldsymbol{A}^2 + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$，因此

(22) $$\ddot{y}(t) + \alpha_1\dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_2\ddot{u}(t) + \beta_1\dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

其中 $\beta_2 = d$，$\beta_1 = \boldsymbol{cb}$，$\beta_0 = \boldsymbol{cAb} + \alpha_1 \boldsymbol{cb} + \alpha_0 d$，此式就是描述輸出 $y(t)$ 與輸入 $u(t)$ 之關係的 ODE-CC。