SS19. 系統實現

在此介紹的技術在工程領域中稱為系統實現(system realization)，此技術適用於所有的 LTI 系統，當然也包括濾波器。

一個 n 階的 LTI 系統通常以微分方程式表示如下：

(1) $$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

利用拉氏轉換後可得

(2) $$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s)$$

其中系統的轉換函數為

(3) $$H(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{b_m(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

具有 n 個極點 $p_k\big|_{k=1,2,\ldots,n}$ 與 m 個零點 $z_l\big|_{l=1,2,\ldots,m}$，所謂系統實現，就是將 $H(s)$ 實際製作出來，雖然製作的方法並非唯一，但最常採用的是狀態變數(state variable)。

首先以嚴格適當系統為例，即 $n>m$，對於 n 階系統而言，可以擁有 n 個狀態變數 $x_k(t)\big|_{k=1,2,\ldots,n}$，定義其拉氏轉換如下：

$$X_k(s)=\frac{s^{k-1}}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s),\quad k=1,2,\ldots,n$$ $x_1(t)$ 拉 氏 轉 換

$$X_1(s)=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s)$$

$$X_k(s)=s^{k-1}X_1(s),\quad k=1,2,\ldots,n \qquad X_k(s)=s\left(s^{k-2}X_1(s)\right)=sX_{k-1}(s),\quad k=2,\ldots,n$$

$$s^nX_1(s)+a_{n-1}s^{n-1}X_1(s)+\cdots+a_1sX_1(s)+a_0X_1(s)=U(s)$$

$$sX_n(s)+a_{n-1}X_n(s)+\cdots+a_1X_2(s)+a_0X_1(s)=U(s)$$

$$sX_n(s)=-a_0X_1(s)-a_1X_2(s)-\cdots-a_{n-1}X_n(s)+U(s)$$

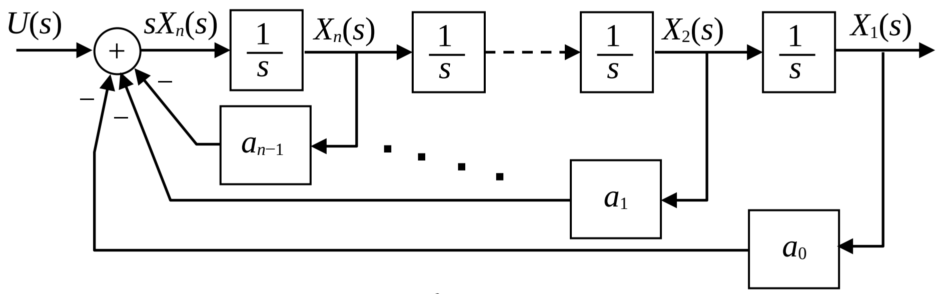


圖 1

(11) $\quad \dot{x}_{k-1}(t) = x_k(t), \qquad k=2,3,\ldots,n$

(12) $\quad \dot{x}_n(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + u(t)$

亦即

(13)
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{cases}$$

其矩陣型式如下所示：

(14)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)}$$

稱為系統的狀態方程式(state equations)，$x(t) = \left[x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t) \right]^T$ 稱為狀態向量(state vector)，故圖 1 的方塊圖也可改為圖 2 所示，其中 $1/s$ 可由積分器取代。

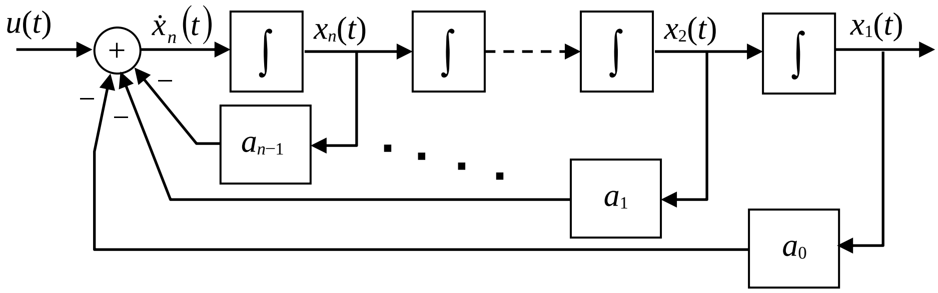


圖 2

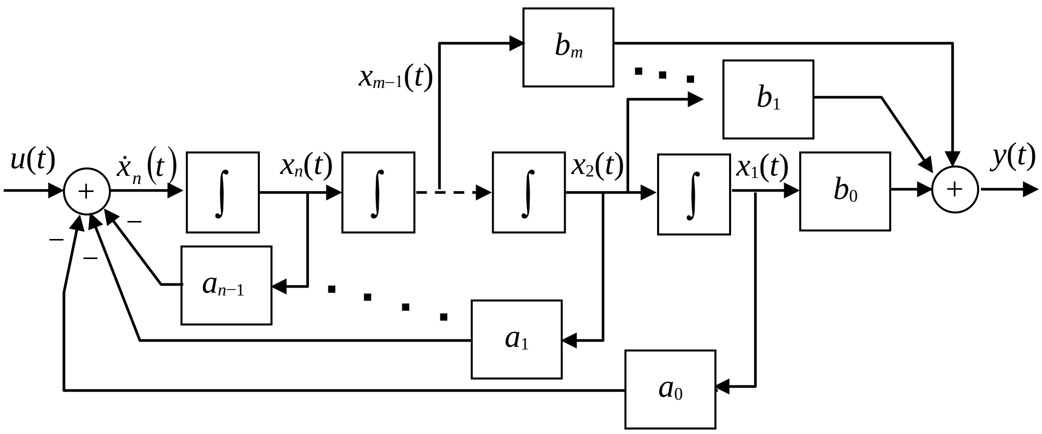


圖 3

再根據(2)式可得輸出與狀態變數之間的關係如下：

(15) $$Y(s)=b_m X_{m-1}(s)+\cdots+b_2 X_3(s)+b_1 X_2(s)+b_0 X_1(s)$$

亦即

(16) $$y(t)=b_m x_{m-1}(t)+\cdots+b_2 x_3(t)+b_1 x_2(t)+b_0 x_1(t)$$

稱為系統的輸出方程式(output equation)，若用方塊圖來描述，則如圖 3 所示。

若是$n=m$，如高通濾波器，屬於適當系統，其轉移函數如下所示：

(17) $$H(s)=\frac{b_n s^n+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

可直接將其改寫為

(18) $$H(s)=b_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

其中$\beta_k=b_k-b_n a_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$，因此

(19) $$Y(s)=H(s)U(s)=\left(b_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\right)U(s)$$

亦即

(20) $$Y(s)=b_n U(s)+\beta_{n-1}X_n(s)+\cdots+\beta_2 X_3(s)+\beta_1 X_2(s)+\beta_0 X_1(s)$$

或者是

(21) $$y(t)=b_n u(t)+\beta_{n-1}x_n(t)+\cdots+\beta_2 x_3(t)+\beta_1 x_2(t)+\beta_0 x_1(t)$$

如圖 4 之方塊圖所示。

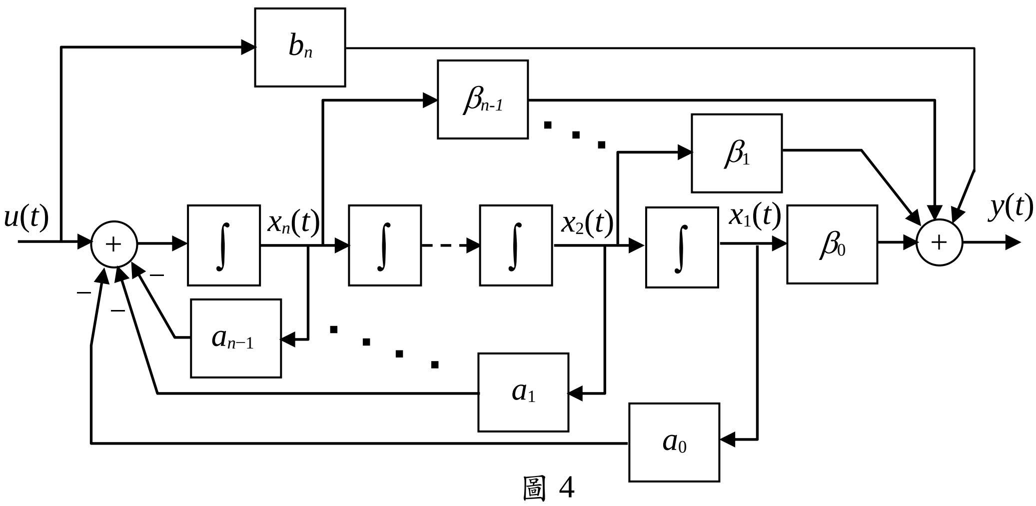
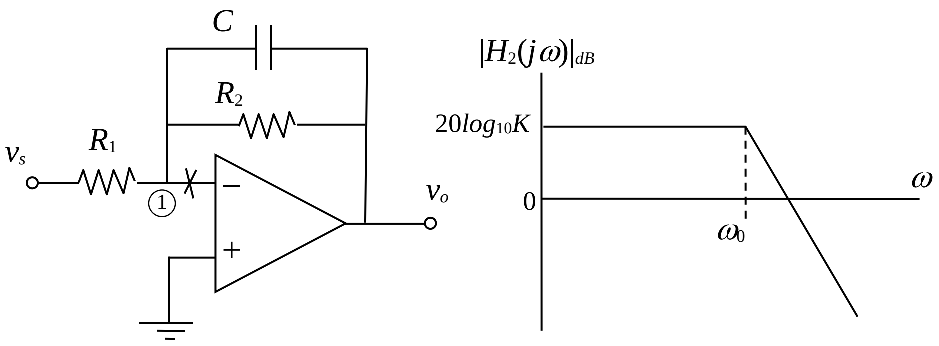


圖 4

除了以上之做法外，有時候也可將系統拆解成數個子系統，再予以串聯或並聯，組合方式有相當多。

接著利用 OP-amp 來設計濾波器，由於 OP-amp 為主動式元件，因此稱其為主動式濾波器。此外，濾波器的設計方式很多，在此所將介紹的是以反相式濾波器為主，其基本架構包括反相放大器、加法器與積分器。

最簡單的主動式一階低通濾波器如圖 5(a)所示，在反相放大器的回授電阻 R_2 上並聯一個電容 C，若單純從電容的阻抗來看，在高頻時電容 C 可視為短路，使得輸出端的電壓 $v_o(t)$ 與節點①的電壓相同，由於節點①為虛擬接地，所以 $v_o(t)=0$，即高頻的輸入訊號會被濾除；在低頻時電容 C 可視為開路，此時整個電路形同反相放大器，使得輸出訊號與輸入訊號反相，但大小成正比，即輸入訊號可以順利通過，根據以上的分析可知圖 5(a)確實是一個低通濾波器。



(a) (b)

圖 5

接著推導此濾波器的轉移函數,從圖 5(a)可知,由 $v_s(t)$ 輸入的電流等於流經 R_2 與 C 的電流和，亦即

$$(22)\qquad \frac{V_s(s)}{R_1}=\frac{-V_o(s)}{R_2}+\frac{-V_o(s)}{1/sC}$$

進一步整理後可得轉移函數為

$$(23)\qquad H(s)=\frac{V_o(s)}{V_s(s)}=-\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1}{1+sR_2C}\right)=-\frac{K}{1+(s/\omega_0)}$$

其中 $K=\dfrac{R_2}{R_1}$，截止頻率 $\omega_0=\dfrac{1}{R_2C_2}$，頻率響應 $\left|H(j\omega)\right|_{dB}$ 如圖 5(b)所示，屬於低通濾波器，通常設計低頻的放大倍率 $K=\dfrac{R_2}{R_1}>1$，故 $\left|H(j0)\right|_{dB}=20\log K>0$。

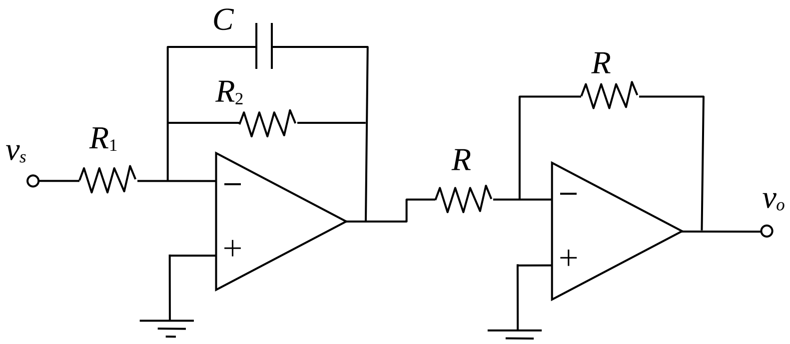


圖 6

若是想要設計輸出與輸入同相的低通濾波器時,只需要在輸出端接上一個單位增益的反相放大器即可，如圖 6 所示，由於圖中反相放大器的增益為−1，故此電路的轉移函數正好是(23)式乘上−1，即

(24) $$H(s)=\frac{K}{1+(s/\omega_0)}$$

也就是說，輸出訊號與輸入訊號同相。

最簡單的主動式一階高通濾波器如圖 7(a)所示，在電阻R_1上串聯一個電容 C，同樣地可利用拉氏轉換來分析轉移函數。

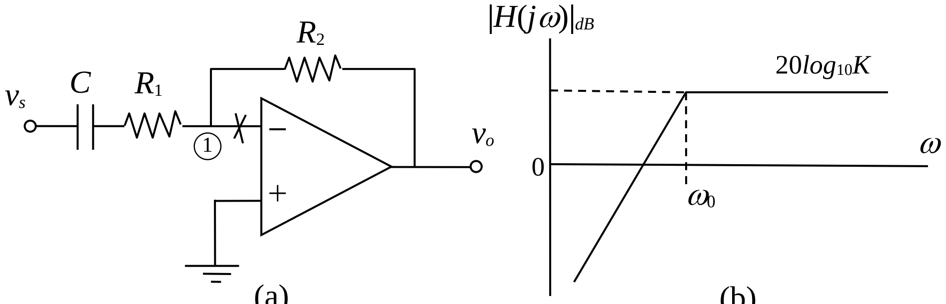


圖 7

從圖 7(a)可知由$v_s(t)$輸入的電流等於流經R_2的電流和，亦即

(25) $$\frac{V_s(s)}{R_1+(1/sC)}=\frac{-V_o(s)}{R_2}$$

故轉移函數為

(26) $$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_s(s)}=-\frac{R_2}{R_1+(1/sC)}=-\frac{K(s/\omega_0)}{1+(s/\omega_0)}$$

其中$K=\dfrac{R_2}{R_1}$，截止頻率$\omega_0=\dfrac{1}{R_1C}$，其頻率響應$\left|H(j\omega)\right|_{dB}$如圖 7(b)所示，屬於高通濾波器，通常設計高頻的放大倍率$K=\dfrac{R_2}{R_1}>1$，故$\left|H(j\infty)\right|_{dB}=20\log K>0$。

若是想要設計輸出與輸入同相的高通濾波器，只需在圖 7(a)的輸出端再接上一個單位增益的反相放大器即可，如圖 8 所示，由於圖中反相放大器的增益為−1，故此電路的轉移函數正好是(26)乘上−1，即

(27) $$H(s)=\frac{K(s/\omega_0)}{1+(s/\omega_0)}$$

也就是說，輸出訊號與輸入訊號同相。

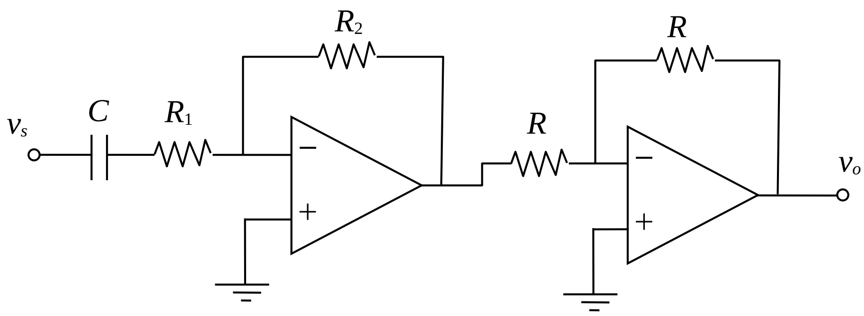
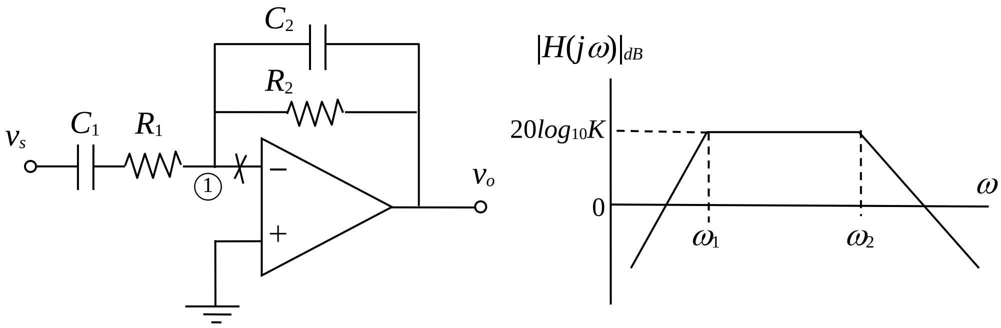


圖 8

主動式二階帶通濾波器如圖 9(a)所示，在反相放大器的電阻R_1上串聯一個電容C_1，同時在電阻R_2上並聯一個電容C_2，接著利用拉氏轉換來分析轉移函數。



(a) (b)

圖 9

從圖 9(a)可知由$v_s(t)$輸入的電流與流經電阻R_2與電容C_2的電流和相等，表示式如下：

(28) $$\frac{V_s(s)}{R_1+(1/sC_1)}=-V_o(s)\left(\frac{1}{R_2}+sC_2\right)$$

故轉移函數為

(29) $$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_s(s)}=-\frac{K(s/\omega_1)}{(1+(s/\omega_1))(1+(s/\omega_2))}$$

其中$K=\dfrac{R_2}{R_1}$，$\omega_1=\dfrac{1}{R_1C_1}$，$\omega_2=\dfrac{1}{R_2C_2}$，取$\omega_2>\omega_1$，則(29)式可改寫為

(30) $$H(s)=-\frac{K(s/\omega_1)}{1+(s/\omega_1)}\frac{1}{1+(s/\omega_2)}$$

此式表示$H(s)$是由兩個一階濾波器串接而成，其中$\dfrac{K(s/\omega_1)}{1+(s/\omega_1)}$為高通濾波器，

$\dfrac{1}{1+(s/\omega_2)}$ 為低通濾波器，其頻率響應如圖 9(b)。

若面對的是一般的系統，其轉移函數有時候難以拆解為串聯或並聯的一階電路，此時就必須採用狀態變數的概念，以下列之二階系統為例做說明：

(31) $$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_s(s)}=\frac{2s+5}{s^2+3s+4}$$

首先選取兩個狀態變數

(32) $$X_1(s)=\frac{1}{s^2+3s+4}V_s(s)$$

(33) $$X_2(s)=\frac{s}{s^2+3s+4}V_s(s)=sX_1(s)$$

因此由(32)式可得

(34) $$V_s(s)=s^2X_1(s)+3sX_1(s)+4X_1(s)=sX_2(s)+3X_2(s)+4X_1(s)$$

亦即狀態方程式為

(35) $$sX_2(s)=V_s(s)-4X_1(s)-3X_2(s)$$

再由(31)式可得輸出方程式如下：

(36) $$V_o(s)=2X_1(s)+5X_2(s)$$

以上狀態方程式與輸出方程式之時域表示式為

(37) $$\dot{x}_2(t)=v_s(t)-4x_1(t)-3x_2(t)$$

(38) $$y_o(t)=2x_1(t)+5x_2(t)$$

由於使用反相積分器，因此相鄰之狀態變數必須正負交錯，如圖 10 所示，其中

(39) $$\overline{x}_2(t)=-x_2(t)$$

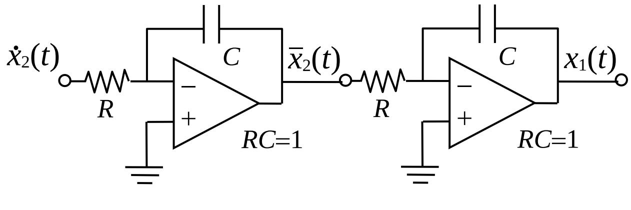


圖 10

再將(37)與(38)兩式改寫為

(40) $\dot{x}_2(t) = -\left[4x_1(t) + \left(-\left[v_s(t) + 3\overline{x}_2(t)\right]\right)\right]$

(41) $y_o(t) = -\left[2\left(-x_1(t)\right) + 5\overline{x}_2(t)\right]$

在(40)式中使用了兩個加法器，在(41)式中使用了一個反相器與一個加法器，完整之電路圖如圖 11。

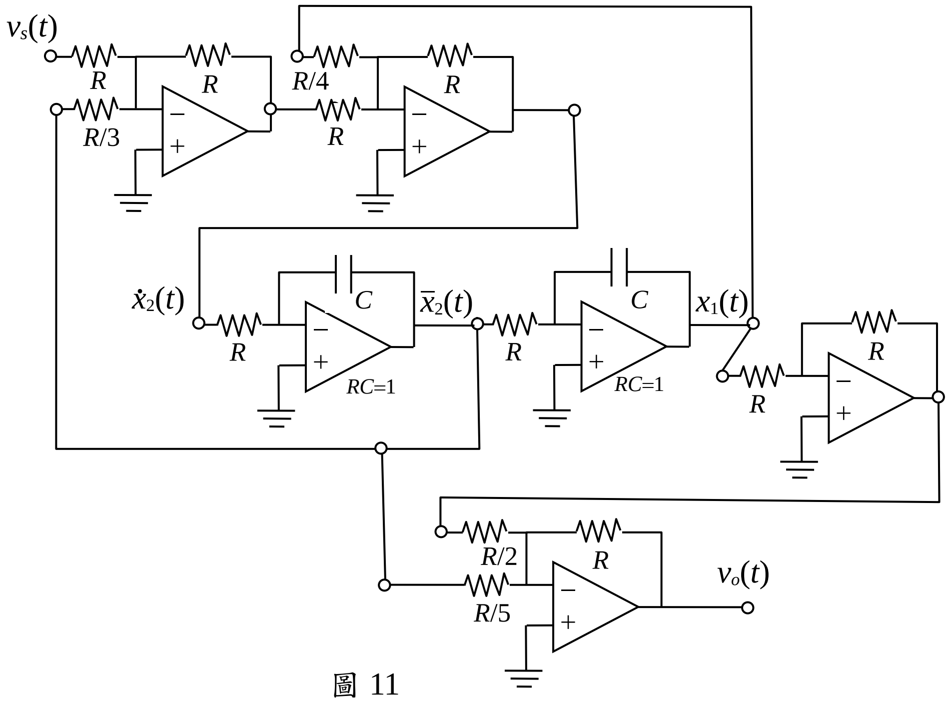


圖 11