SS17. 高階系統波德圖

由於濾波器$H(s)$經常是以高階 LTI 系統來設計，因此有必要了解高階系統之波德圖是如何產生，一般的高階濾波器轉移函數可表為

(1) $$H(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{b_m(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_m)}$$

其中極點$p_k\big|_{k=1,2,\ldots,n}$與零點$z_l\big|_{l=1,2,\ldots,m}$是實數或共軛複數，為了繪製波德圖，通常將(1)式改寫為

(2) $$H(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{K(1-s/z_1)\cdots(1-s/z_m)}{(1-s/p_1)\cdots(1-s/p_n)}$$

其中$Q(s)$與$P(s)$可歸類為下列基本型式：

(3) $Q_1(s)=K>0$

(4) $Q_2(s)=K<0$

(5) $Q_3(s)=s^n,\quad n\in N$

(6) $Q_4(s)=1+\dfrac{s}{a},\quad a>0$

(7) $Q_5(s)=1-\dfrac{s}{a},\quad a>0$

(8) $Q_6(s)=1+2\xi(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2,\quad 0\le\xi<1,\quad \omega_n>0$

(9) $Q_7(s)=1-2\xi(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2,\quad 0\le\xi<1,\quad \omega_n>0$

(10) $P_1(s)=s^n,\quad n\in N$

(11) $P_2(s)=1+\dfrac{s}{a},\quad a>0$

(12) $P_3(s)=1+2\xi(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2,\quad 0<\xi<1,\quad \omega_n>0$

從$P(s)$之基本型式可知，極點不能落在複數平面的右半面，即$Re(p_k)\ge 0$，也就是說，濾波器$H(s)$不可以是不穩定系統，此外$Q_6(s)$、$Q_7(s)$與$P_3(s)$所代表的是濾波器具有共軛複數的極點或零點。

$Q(s)$各基本型式之波德圖$\left|Q_k(j\omega)\right|_{dB}$與$\angle Q_k(j\omega)$分析如下所示：

[Q1] $Q_1(s)=K>0$

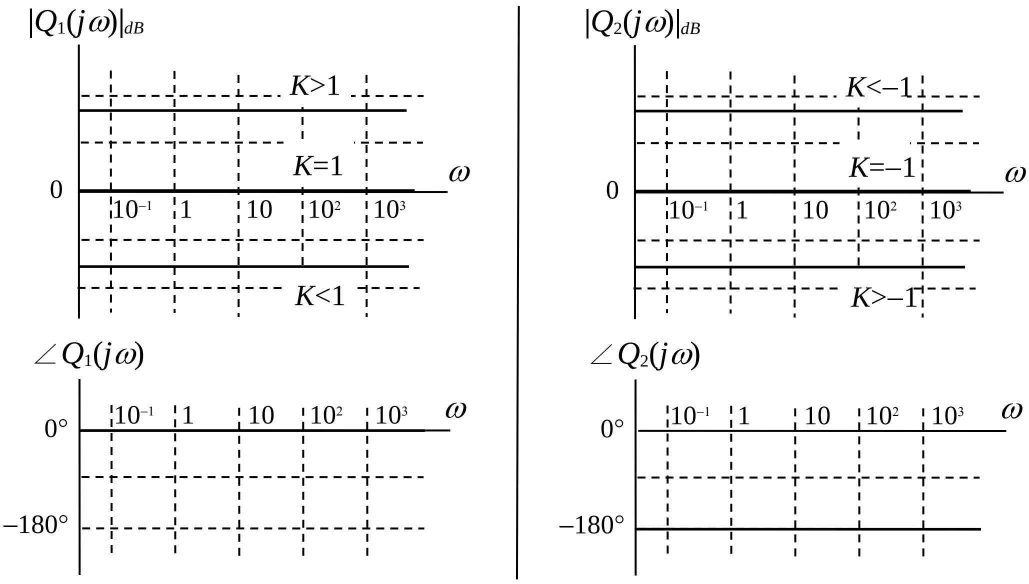
令$s=j\omega$可得

(13)　　$y_{mag} = \left|Q_1\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20\,log\,K$

(14)　　$y_{phase} = \angle Q_1\left(j\omega\right) = 0°$

由(13)式可知量值波德圖是一條水平線，當 $K=1$ 時，$y_{mag}=0$ 正好是水平軸，當 $K>1$ 時，$y_{mag}>0$ 在水平軸上方，當 $K<1$ 時，$y_{mag}<0$ 在水平軸下方。

由(14)式可知相位波德圖即水平軸。



[Q2]　$Q_2\left(s\right) = K < 0$

令 $s = j\omega$ 可得

(15)　　$y_{mag} = \left|Q_1\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20\,log\left|K\right|$

(16)　　$y_{phase} = \angle Q_1\left(j\omega\right) = -180°$

由(15)式可知量值波德圖是一條水平線，當 $K=-1$ 時，$y_{mag}=0$ 正好是水平軸，當 $K<-1$ 時，$y_{mag}>0$ 在水平軸上方，當 $K>-1$ 時，$y_{mag}<0$ 在水平軸下方。

由(16)式可知相位波德圖 $y_{phase}=-180°$ 亦為水平線。

[Q3]　$Q_3\left(s\right) = s^n,\quad n \in N$

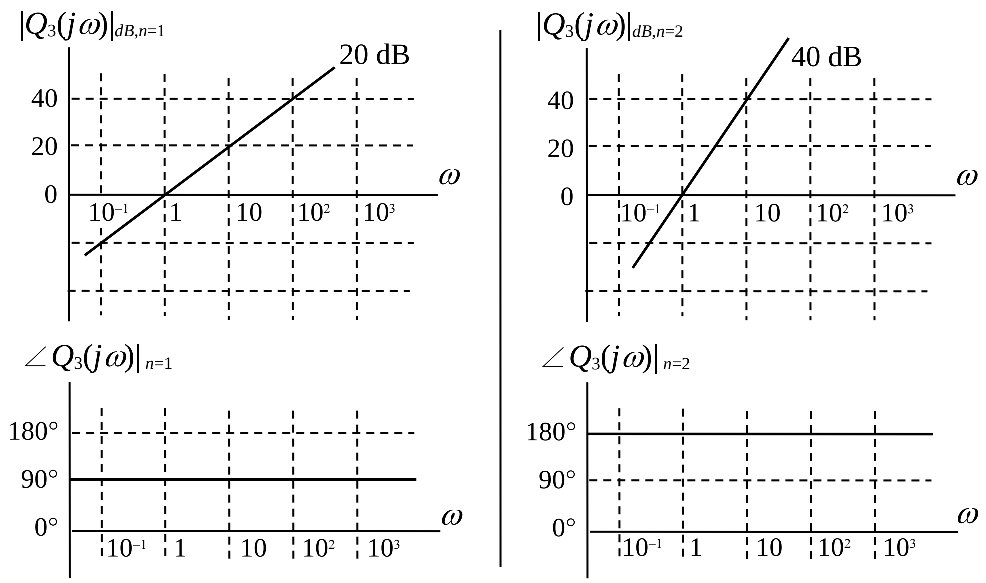
此系統具有 n 個 $z=0$ 的零點，令 $s = j\omega$ 可得

(17) $$y_{mag} = \left|Q_3\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20n\,log\,\omega = 20nx$$

(18) $$y_{phase} = \angle Q_3\left(j\omega\right) = n\cdot 90^\circ$$

由(17)式可知量值波德圖是一條斜率為 $20n\ dB/dec$ 之直線且通過 $\omega=1$ 時的點 $\left(x, y_{mag}\right) = \left(0,0\right)$。

由(18)式可知相位波德圖 $y_{phase} = n\cdot 90^\circ$ 為水平線。



[Q4] $Q_4\left(s\right) = 1 + \frac{s}{a}, \quad a > 0$

此系統具有一個 $z = -a < 0$ 的零點，令 $s = j\omega$ 可得

(19) $$Q_4\left(j\omega\right) = 1 + j\frac{\omega}{a} = \sqrt{1+\frac{\omega^2}{a^2}}e^{j\,tan^{-1}\left(\omega/a\right)}$$

因此量值部分為

(20) $$y_{mag} = \left|Q_4\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20\,log\sqrt{1+\frac{\omega^2}{a^2}} = 10\,log\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)$$

當 $\omega \to 0$ 時，可得

(21) $$y_{mag} = 10\,log\left(1+\frac{0^+}{a^2}\right) \to 0$$

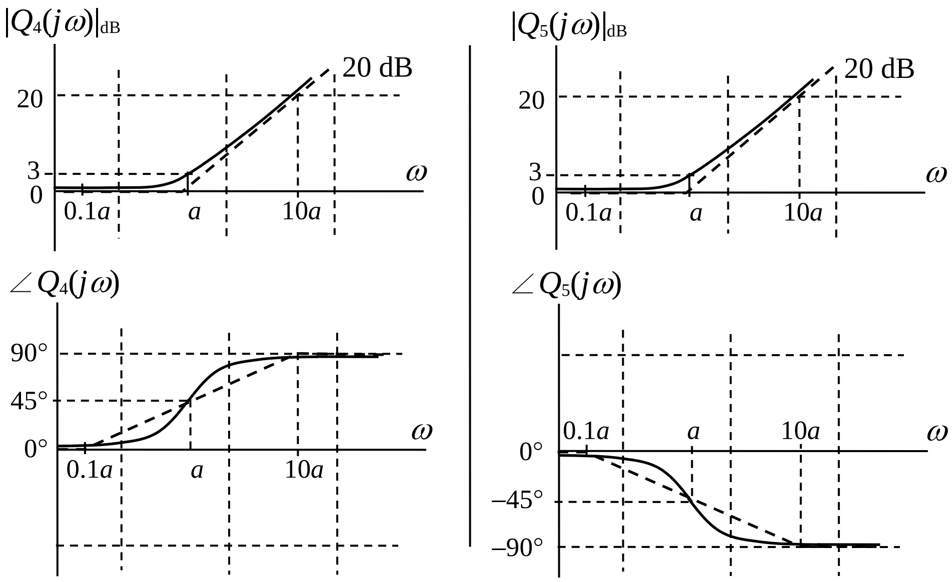
當 $\omega = a$ 時，可得

(22) $$y_{mag} = 10\,log\left(1+\frac{a^2}{a^2}\right) = 3.01\ dB$$

當 $\omega \to \infty$ 時，可得

(23) $$y_{mag} = 10\,log\left(\frac{\omega^2}{a^2}\right)_{\omega\to\infty} = 20\left(log\,\omega - log\,a\right) = 20\left(x - log\,a\right)$$

在量值之概略波德圖中(以虛線表示)，(23)式是以斜率為 20 dB/dec 的虛斜線表示，該線通過點 $\left(x, y_{mag}\right) = \left(log\,a, 0\right)$，此點的對應頻率為 $\omega = a$。



在相位部分為

(24) $$\angle Q_4\left(j\omega\right) = tan^{-1}\left(\omega / a\right)$$

當 $\omega \to 0$ 時，可得

(25) $$\angle Q_4\left(j0^+\right) = tan^{-1}\frac{0^+}{a} \to 0°$$

當 $\omega = a$ 時，可得

(26) $$\angle Q_4\left(ja\right) = tan^{-1}\frac{a}{a} = 45°$$

當 $\omega \to \infty$ 時，可得

(27) $\angle Q_4(j\infty)=tan^{-1}\dfrac{\infty}{a}\to 90°$

如相位$\angle Q_4(j\omega)$之波德圖所示。

[Q5] $Q_5(s)=1-\dfrac{s}{a},\quad a>0$

此系統具有一個$z=a>0$的零點，令$s=j\omega$可得

(28) $Q_5(j\omega)=1-j\dfrac{\omega}{a}=\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{a^2}}e^{-j\,tan^{-1}(\omega/a)}$

(29) $\left|Q_5(j\omega)\right|=\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{a^2}}=\left|Q_4(j\omega)\right|$

(30) $\angle Q_5(j\omega)=-tan^{-1}(\omega/a)=-\angle Q_4(j\omega)$

故$Q_5(j\omega)$與$Q_4(j\omega)$之量值波德圖相同，但相位波德圖異號。

[Q6] $Q_6(s)=1+2\xi(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2,\quad 0\le\xi<1,\quad \omega_n>0$

此系統具有兩個$z=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$的共軛複數零點，令$s=j\omega$可得

(31)
$$Q_6(j\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$
$$=\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\;e^{j\,tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right)}$$

因此量值部分為

(32)
$$y_{mag}=\left|Q_6(j\omega)\right|_{dB}=20\,log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
$$=10\,log\left(1+\left(4\xi^2-2\right)\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\frac{\omega^4}{\omega_n^4}\right)\ dB$$

當$\omega\to 0$時，可得

(33) $$y_{mag}=10\,log\left(1+\left(4\xi^2-2\right)\frac{0^+}{\omega_n^2}+\frac{0^+}{\omega_n^4}\right)\to 0\ dB$$

當$\omega=\omega_n$時，可得

(34) $$y_{mag}=\left|Q_6(j\omega_n)\right|_{dB}=10\,log\left(4\xi^2\right)=6.02+20\,log\,\xi\ dB$$

當 $\omega \to \infty$ 時，可得

(35) $$y_{mag} = 10\,log\left(\frac{\omega^4}{\omega_n^4}\right)_{\omega\to\infty} \to 40\left(log\,\omega - log\,\omega_n\right) = 40\left(x - log\,\omega_n\right)$$

在量值之概略波德圖中(以虛線表示)，(35)式是以斜率為 40 dB/dec 的虛斜線表示，該線通過點 $\left(x, y_{mag}\right) = \left(log\,\omega_n, 0\right)$，此點的對應頻率為 $\omega = \omega_n$。

在相位部分為

(36) $$\angle Q_6\left(j\omega\right) = tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

當 $\omega \to 0$ 時，可得

(37) $$\angle Q_6\left(j0^+\right) = tan^{-1}\frac{0^+}{\omega_n^2} \to 0°$$

當 $\omega = \omega_n$ 時，可得

(38) $$\angle Q_6\left(j\omega_n\right) = tan^{-1}\infty = 90°$$

當 $\omega \to \infty$ 時，可得

(39) $$\angle Q_6\left(j\infty\right) = tan^{-1}\frac{\infty}{-\infty} \to 180°$$

如相位 $\angle Q_6\left(j\omega\right)$ 之波德圖所示。

[Q7] $Q_7\left(s\right) = 1 - 2\xi\left(s/\omega_n\right) + \left(s/\omega_n\right)^2,\quad 0 \le \xi < 1,\quad \omega_n > 0$

此系統具有兩個 $z = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ 的共軛複數零點，令 $s = j\omega$ 可得

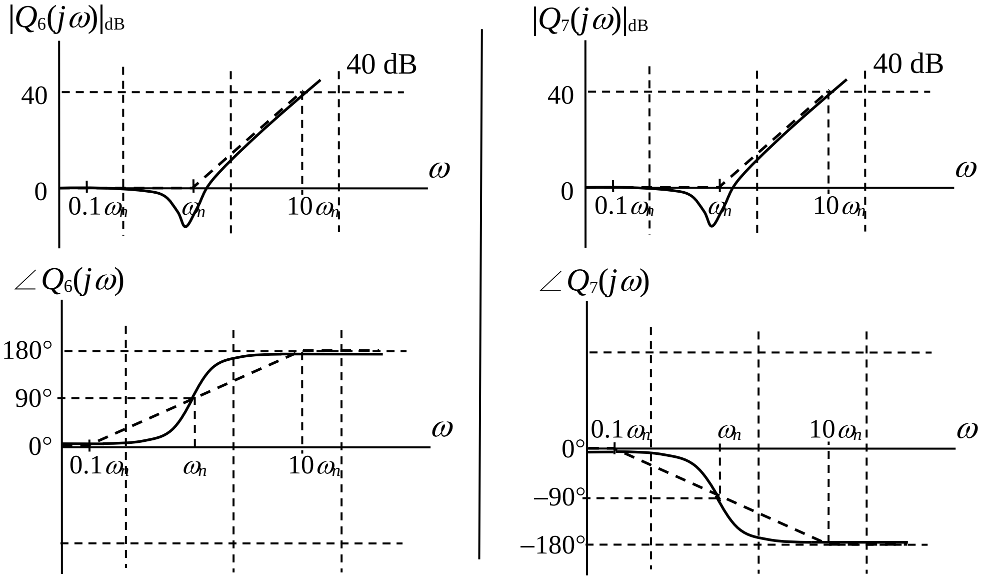
(40) $$\begin{aligned} Q_7\left(j\omega\right) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\; e^{-j\,tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)} \end{aligned}$$

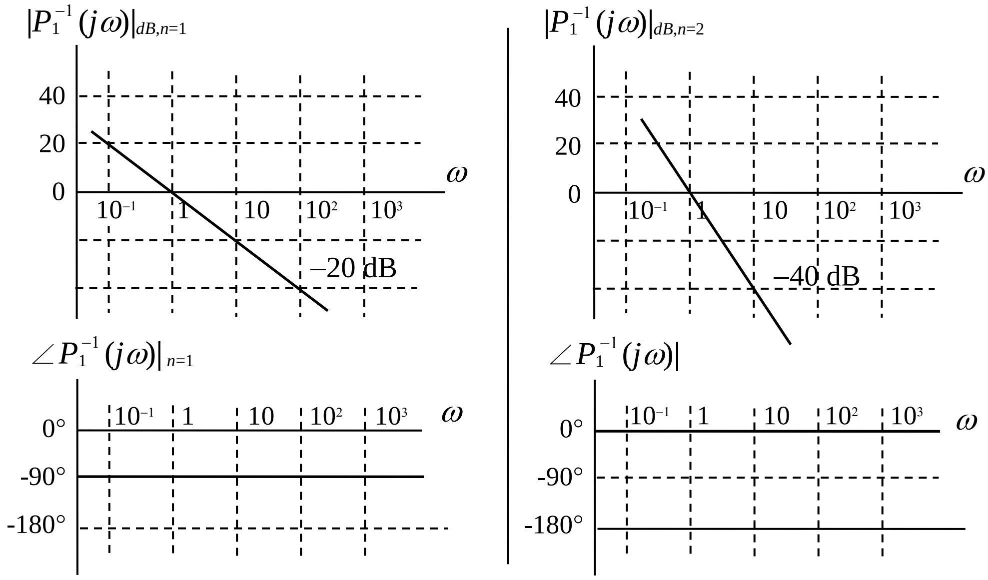
顯然

(41) $$\left|Q_7\left(j\omega\right)\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \left|Q_6\left(j\omega\right)\right|$$

(42) $$\angle Q_7(j\omega) = -tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right) = -\angle Q_6(j\omega)$$

故$Q_7(j\omega)$與$Q_6(j\omega)$之量值波德圖相同，但相位波德圖異號。





$P(s)$各基本型式之波德圖$\left|P_k^{-1}(j\omega)\right|_{dB}$與$\angle P_k^{-1}(j\omega)$分析如下所示：

[P1] $P_1^{-1}(s) = s^{-n},\quad n \in N$

由於$P_1^{-1}(s)$是$Q_3(s)$的倒數，因此

(43) $$\left|P_1^{-1}(j\omega)\right|_{dB} = -\left|Q_3(j\omega)\right|_{dB}$$

(44) $\angle P_1^{-1}(j\omega) = -\angle Q_3(j\omega)$

故 $P_1^{-1}(j\omega)$ 與 $Q_3(j\omega)$ 之量值與相位波德圖皆異號。

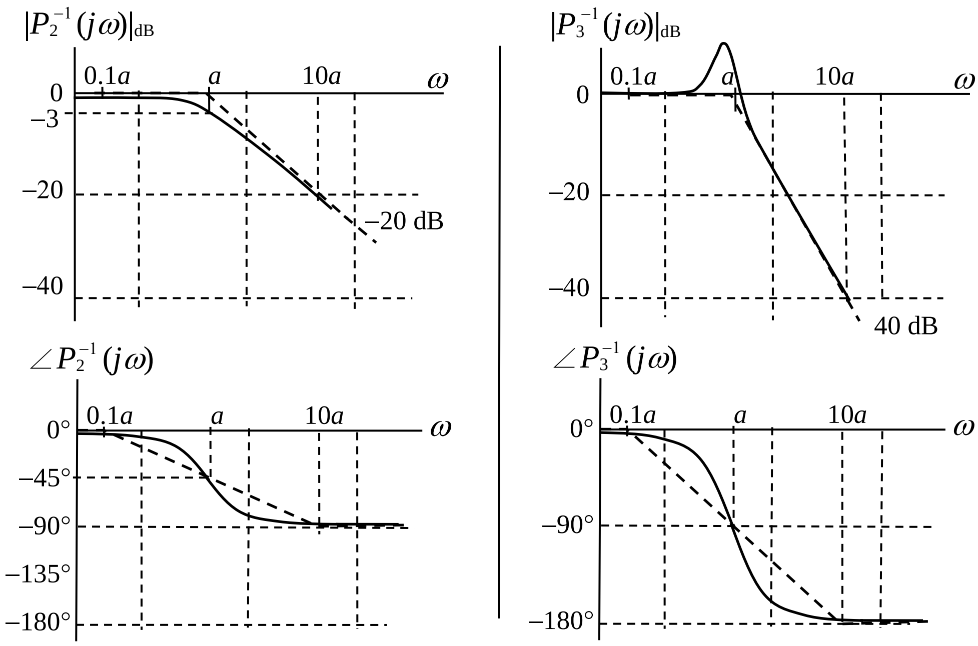
[P2] $P_2^{-1}(s) = \left(1+\dfrac{s}{a}\right)^{-1}$, $a>0$

由於 $P_2^{-1}(s)$ 是 $Q_4(s)$ 的倒數，因此

(45) $\left|P_2^{-1}(j\omega)\right|_{dB} = -\left|Q_4(j\omega)\right|_{dB}$

(46) $\angle P_2^{-1}(j\omega) = -\angle Q_4(j\omega)$

故 $P_2^{-1}(j\omega)$ 與 $Q_4(j\omega)$ 之量值與相位波德圖皆異號。



[P3] $P_3(s) = 1 + 2\xi(s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2$, $0<\xi<1$, $\omega_n>0$

由於 $P_3^{-1}(s)$ 是 $Q_6(s)$ 的倒數，因此

(47) $\left|P_3^{-1}(j\omega)\right|_{dB} = -\left|Q_6(j\omega)\right|_{dB}$

(48) $\angle P_3^{-1}(j\omega) = -\angle Q_6(j\omega)$

故 $P_3^{-1}(j\omega)$ 與 $Q_6(j\omega)$ 之量值與相位波德圖皆異號。

例題： 畫出 $H(s)=\dfrac{50\,s(s-2)}{(s+10)(s^2+8s+25)}$ 之波德圖

解： 改寫轉移函數如下：

$$H(s)=\frac{-0.4\,s\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{s}{10}\right)\left(1+1.6\left(\dfrac{s}{5}\right)+\left(\dfrac{s}{5}\right)^2\right)}$$

故

$$H(j\omega)=\frac{-0.4(j\omega)\left(1-j\dfrac{\omega}{2}\right)}{\left(1+j\dfrac{\omega}{10}\right)\left(\left(1-\dfrac{\omega^2}{5^2}\right)+j1.6\left(\dfrac{\omega}{5}\right)\right)}$$

此式包含

$$Q_2(j\omega)=-0.4,\quad Q_3(j\omega)=j\omega,\quad Q_5(j\omega)=1-j\frac{\omega}{2}$$

$$P_2(j\omega)=1+j\frac{\omega}{10},\quad P_3(j\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{5^2}\right)+j1.6\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

波德圖如下所示：