SS16. 濾波器原理

濾波器(filter)是處理訊號時經常使用的元件，可依據輸入訊號的頻率分布，來輸出所需要的頻域，通常濾波器是由 LTI 系統所構成，表示式如下：

(1) $$Y(s)=H(s)U(s)$$

其中轉移函數為

(2) $$H(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{b_m(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

稱 $p_k\big|_{k=1,2,\ldots,n}$ 為 n 個極點(poles)， $z_j\big|_{j=1,2,\ldots,m}$ 為 m 個零點(zeros)，不論是極點或零點都可以是實數或共軛複數，而且濾波器是一個穩定系統，因此所有的極點都必須滿足 $Re(p_k)<0$ ，即落在複數平面的左半面，也因為如此，在設計濾波器時無需考慮任何初值。

令 $s=j\omega$，則

(3) $$Y(j\omega)=H(j\omega)U(j\omega)$$

由於傅立葉轉換與拉氏轉換之關係式如下：

(4) $$\hat{f}(\omega)=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{j\omega t}dt=F(s)\big|_{s=j\omega}=F(j\omega)$$

因此(3)式可改寫為

(5) $$\hat{y}(\omega)=H(j\omega)\hat{u}(\omega)$$

這個表示法主要是在凸顯訊號與系統的區隔，輸入與輸出訊號是以傅立葉轉換 $\hat{u}(\omega)$ 與 $\hat{y}(\omega)$ 來表示，而系統則是以拉氏轉換 $H(s)\big|_{s=j\omega}$ 來代表。

根據反傅立葉轉換可知(6) $$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\hat{u}(\omega)e^{j\omega t}\right)}_{u_\omega(t)}d\omega$$

(7) $$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{y}(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\hat{y}(\omega)e^{j\omega t}\right)}_{y_\omega(t)}d\omega$$

從以上兩積分式可知，輸入 $u(t)$ 與輸出 $y(t)$ 都是由無限多在頻率 ω 處的微小頻率分量 $u_\omega(t)=\frac{1}{2\pi}\hat{u}(\omega)e^{j\omega t}$ 與 $y_\omega(t)=\frac{1}{2\pi}\hat{y}(\omega)e^{j\omega t}$ 所構成。

將(5)式乘上 $\frac{1}{2\pi}e^{j\omega t}$ 可得

(8) $$\frac{1}{2\pi}\hat{y}(\omega)e^{j\omega t}=\frac{1}{2\pi}H(j\omega)\hat{u}(\omega)e^{j\omega t}=H(j\omega)\left(\frac{1}{2\pi}\hat{u}(\omega)e^{j\omega t}\right)$$

亦即

(9) $$y_\omega(t)=H(j\omega)u_\omega(t)=\left|H(j\omega)\right|e^{j\angle H(j\omega)}u_\omega(t)$$

如圖 1 所示，當 $\left|H(j\omega)\right|>1$ 時，在特定頻率 ω 之輸入分量 $u_\omega(t)$ 會被放大後再輸出，反之，當 $\left|H(j\omega)\right|\ll 1$ 時，$u_\omega(t)$ 將受到大幅減抑，在輸出端可予以忽略，視同濾除。

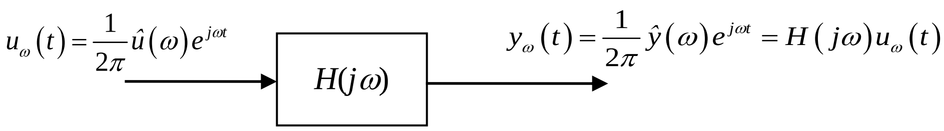


圖 1

分析濾波器時是依據 $H(j\omega)$ 的波德圖(Bode plot)，分別以量值(magnitude)及相位(phase)呈現，即 $\left|H(j\omega)\right|$ 與 $\angle H(j\omega)$，說明如下：

由(5)式可知在量值部分表為

(10) $$\left|\hat{y}(\omega)\right|=\left|H(j\omega)\right|\left|\hat{u}(\omega)\right|$$

亦即在特定頻率 ω 處，$\left|H(j\omega)\right|$ 為輸出大小 $\left|\hat{u}(\omega)\right|$ 的縮放倍率，由於此式的乘積計算較不容易，一般改採 dB 值的加法方式，定義 $A\in R$ 的 dB 值為

(11) $$A_{dB}=20\,log\,A$$

其中 $log\equiv log_{10}$ 以 10 為底，再由(10)式可得

(12) $$\begin{aligned}20\,log\left|\hat{y}(\omega)\right|&=20\,log\left(\left|H(j\omega)\right|\left|\hat{u}(\omega)\right|\right)\\&=20\,log\left|H(j\omega)\right|+20\,log\left|\hat{u}(\omega)\right|\end{aligned}$$

亦即

(13) $$\left|\hat{y}(\omega)\right|_{dB}=\left|H(j\omega)\right|_{dB}+\left|\hat{u}(\omega)\right|_{dB}$$

令 $\alpha>0$，則當 $\left|H(j\omega)\right|=10^{\alpha}$ 時，可得 $\left|H(j\omega)\right|_{dB}=20\alpha$，也就是說，在特定頻率 ω

處，$\left|\hat{y}(\omega)\right|$將被放大為$\left|\hat{u}(\omega)\right|$的$10^{\alpha}$倍，$\left|\hat{y}(\omega)\right|_{dB}$也比$\left|\hat{u}(\omega)\right|_{dB}$增加$20\alpha$之 dB 值。

同理當$\left|H(j\omega)\right|=10^{-\alpha}$時，可得$\left|H(j\omega)\right|_{dB}=-20\alpha$，因此在特定頻率$\omega$處，$\left|\hat{y}(\omega)\right|$將被縮小為$\left|\hat{u}(\omega)\right|$的$10^{-\alpha}$倍，$\left|\hat{y}(\omega)\right|_{dB}$也會比$\left|\hat{u}(\omega)\right|_{dB}$減少$20\alpha$之 dB 值。

同樣根據(5)式，在相位部分可得

(14) $$\angle\hat{y}(\omega)=\angle H(j\omega)+\angle\hat{u}(\omega)$$

亦即在特定頻率ω處，$\angle H(j\omega)$為輸出與輸入間的相位差距，在實際系統中，由於輸入與輸出彼此為因果關係，因此輸出訊號在時間上會產生延遲(delay)現象，此現象若反應在頻域上，將導致相位的落後(lagging)，表為$\angle H(j\omega)<0$，或者是$\angle\hat{y}(\omega)<\angle\hat{u}(\omega)$。

在工程應用上常見的濾波器有三種基本型式，分別為低通濾波器(lowpass filter)、帶通濾波器(bandpass filter)、與高通濾波器(highpass filter)。

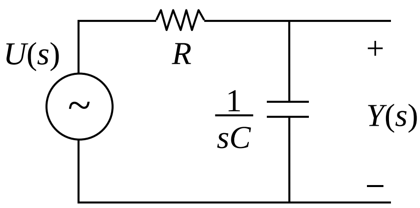


圖 2

最簡易的低通濾波器為一階的 RC 電路，如圖 2 所示，其轉移函數為

(15) $$H_{LP}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+sRC}$$

由於分母次數高於分子次數，所以是一個嚴格適當系統。

令$s=j\omega$，$\omega_0=1/RC$，可得

(16) $$H_{LP}(j\omega)=\frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}=\left|H_{LP}(j\omega)\right|e^{j\angle H_{LP}(j\omega)}$$

其中

(17) $$\left|H_{LP}(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

(18) $\angle H_{LP}\left(j\omega\right)=-tan^{-1}\left(\omega/\omega_0\right)$

在 $H_{LP}\left(j\omega\right)$ 之波德圖中，水平軸以對數形式表示，即 $x=log\,\omega$，量值與相位的垂直軸則分別是 $y_{mag}=\left|H_{LP}\left(j\omega\right)\right|_{dB}$ 與 $y_{phase}=\angle H_{LP}\left(j\omega\right)$，首先畫出 $\left|H_{LP}\left(j\omega\right)\right|_{dB}$ 之波德圖，根據(17)式可得 (19)

$$y_{mag}=\left|H_{LP}\left(j\omega\right)\right|_{dB}=20\,log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2}}=-10\,log\left(1+\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)$$

因此

當 $\omega\to 0$ 時，

(20) $y_{mag}\to -10\,log\,1=0\ \ dB$

當 $\omega=\omega_0$ 時，

(21) $y_{mag}=-10\,log\left(1+1\right)=-10\,log\,2=-3\ \ dB$

當 $\omega\to\infty$ 時，

(22) $y_{mag}\to -10\,log\left(\omega/\omega_0\right)^2=-20\left(x-log\,\omega_0\right)_{x=log\,\omega}$

在圖 3 左圖中，粗虛線是概略的量值波德圖，包括(22)式所對應的斜虛線，其斜率為 $-20\ dB/dec$ 且通過在 $\omega=\omega_0$ 的點 $\left(x,y_{mag}\right)=\left(log\,\omega_0,0\right)$，而實線則是實際的波德圖 $\left|H_{LP}\left(j\omega\right)\right|_{dB}$，由(21)式可知 $\left|H_{LP}\left(j\omega_0\right)\right|_{dB}=-3\ dB$，稱 $\omega=\omega_0$ 為 3dB 點，又因為在該頻率之後的量值 $\left|H_{LP}\left(j\omega\right)\right|$ 開始大幅下降，如同截止般，故 $\omega=\omega_0$ 也稱為截止頻率(cutoff frequency)。

其次是 $\angle H_{LP}\left(j\omega\right)$ 之波德圖，根據(18)式可得 (23)

$$y_{phase}=\angle H_{LP}\left(j\omega\right)=-tan^{-1}\left(\omega/\omega_0\right)$$

因此

當 $\omega\to 0$ 時，$y_{phase}\to -tan^{-1}\left(0\right)=0^\circ$

當 $\omega=0.1\omega_0$ 時，$y_{phase}=-tan^{-1}\left(0.1\right)=-5.71^\circ$

當 $\omega=\omega_0$ 時，$y_{phase}=-tan^{-1}\left(1\right)=-45^\circ$

當 $\omega=10\omega_0$ 時，$y_{phase}=-tan^{-1}\left(10\right)=-84.3^\circ$

當 $\omega\to\infty$ 時，$y_{phase}\to -tan^{-1}(\infty)=-90°$

在圖 3 右圖中先以虛直線標出概略圖，通過 $(log\,0.1\omega_0,0°)$、$(log\,\omega_0,-45°)$ 與 $(log\,10\omega_0,-90°)$ 三點，再以實線畫出實際的波德圖 $\angle H_{LP}(j\omega)$，除了通過已計算出結果的 $(log\,0.1\omega_0,-5.71°)$、$(log\,\omega_0,-45°)$ 與 $(log\,10\omega_0,-84.3°)$ 三點外，還必須滿足當 $\omega\to 0$ 時，$y_{phase}\to 0°$，當 $\omega\to\infty$ 時，$y_{phase}\to -90°$。

顯然地，$\angle H_{LP}(j\omega)<0$，即相位皆為負，因為此低通濾波器 $H_{LP}(s)$ 是一個嚴格適當系統(strictly proper system)，其分母的次數大於分子次數。

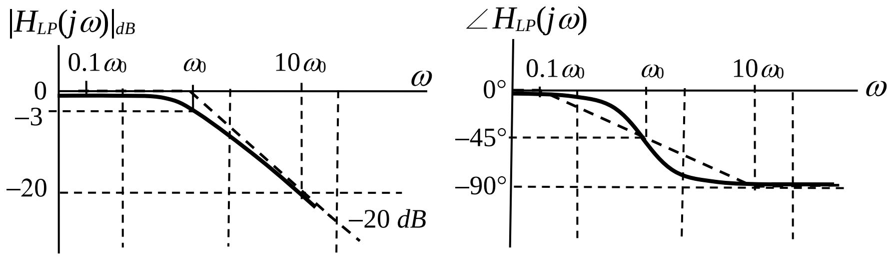


圖 3

事實上低通濾波器也可設計成高階的 LTI 系統，底下以二階系統做為範例。

> 例題： 給定二階濾波器 $H(s)=\dfrac{1}{(1+s/10)(1+s/40)}$，畫出概略的波德圖。若 $|\hat{y}(\omega)|<0.01|\hat{u}(\omega)|$，則頻率 ω 的範圍為何？

解： 由於此二階濾波器 $H(j\omega)=(1+j\omega/10)^{-1}(1+j\omega/40)^{-1}$ 可視為兩個串聯的一階的濾波器 $H_1(j\omega)=(1+j\omega/10)^{-1}$ 與 $H_2(j\omega)=(1+j\omega/40)^{-1}$ 所組成，下圖中的兩條虛折線分別是 $H_1(j\omega)$ 與 $H_2(j\omega)$ 的波德圖，3dB 點分別落在 $\omega=10$ 與 $\omega=40$，由於

$$|H(j\omega)|_{dB}=|H_1(j\omega)|_{dB}+|H_2(j\omega)|_{dB}$$

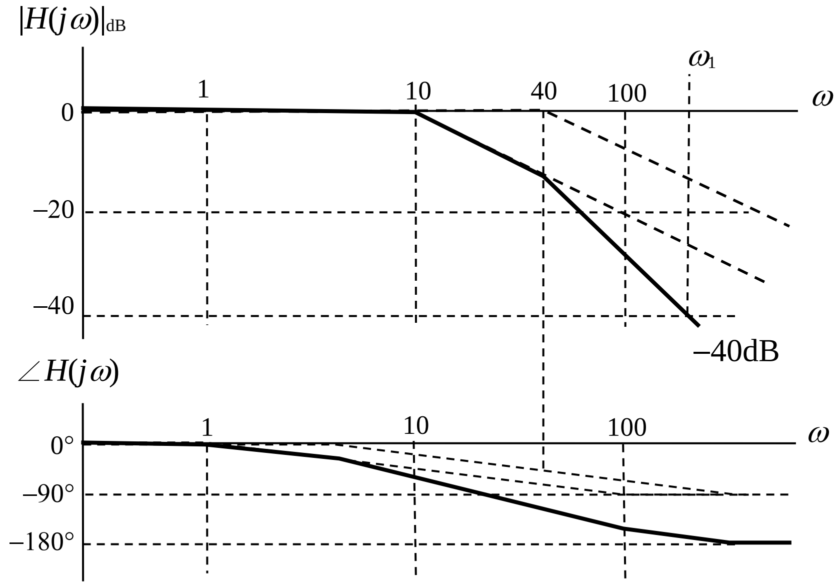
$$\angle H(j\omega)=\angle H_1(j\omega)+\angle H_2(j\omega)$$

因此只需相加就可得到二階濾波器 $H(j\omega)$ 的概略波德圖，如實線所示。

當 $|\hat{y}(\omega)|<0.01|\hat{u}(\omega)|$，亦即 $|H(j\omega)|<0.01$ 或 $|H(j\omega)|_{\text{dB}}<-40\ dB$，由概略之波德圖可看出頻率範圍約 $\omega>\omega_1\approx 200\ rad/s$，亦可實際計算 ω_1 如下：

$$|H(j\omega_1)|=\sqrt{\left(1+\frac{\omega_1^2}{10^2}\right)\left(1+\frac{\omega_1^2}{40^2}\right)}^{\,-1}=0.01$$

其結果為 $\omega_1 = 198\ rad/s$ ，故當 $\omega > 198\ rad/s$ ，可滿足 $\left|\hat{y}(\omega)\right| < 0.01\left|\hat{u}(\omega)\right|$ 之條件。



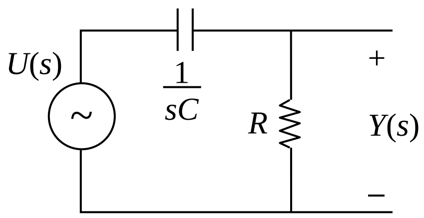


圖 4

高通濾波器也可使用一階的 RC 電路，如圖 4 所示，轉移函數為

(24) $$H_{HP}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sRC}{1+sRC}$$

由於分母次數等於分子次數，因此不是嚴格適當系統，而是一個適當系統。

令 $s = j\omega$，$\omega_0 = 1/RC$ ，可得

(25) $$H_{HP}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0} = \left|H_{HP}(j\omega)\right| e^{j\angle H_{HP}(j\omega)}$$

其中

(26) $\left|H_{HP}\left(j\omega\right)\right|=\dfrac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2}}$

(27) $\angle H_{HP}\left(j\omega\right)=90^\circ-tan^{-1}\left(\omega/\omega_0\right)$

波德圖如圖 5 所示。由於高通濾波器 $H_{HP}(s)$ 並不是一個嚴格適當系統，因此 $\angle H_{HP}(j\omega)>0$，其相位皆為正，代表輸出訊號沒有延遲現象。

同樣地，高通濾波器也可以利用高階的 LTI 系統來達成，例如：

(28) $H_{HP}(s)=\dfrac{s^2/10}{(1+s/2)(1+s/5)}$

就是一個二階的高通濾波器，其波德圖如圖 6 所示。

除了低通與高通濾波器外，還有帶通濾波器，若以二階 LTI 系統為例，其轉移函數可能為 $H_{LP}(s)=\dfrac{1}{1+as+bs^2}$ 、 $H_{HP}(s)=\dfrac{bs^2}{1+as+bs^2}$ 或 $H_{BP}(s)=\dfrac{as}{1+as+bs^2}$ ，其中 $H_{LP}(s)$ 為低通濾波器，其輸出可保留輸入訊號的低頻部份，而 $H_{HP}(s)$ 為高通濾波器，可保留高頻部份，若想保留住中間頻域，則可採用 $H_{BP}(s)$，稱為帶通濾波器，其概略之量值波德圖通常如圖 7 所示。

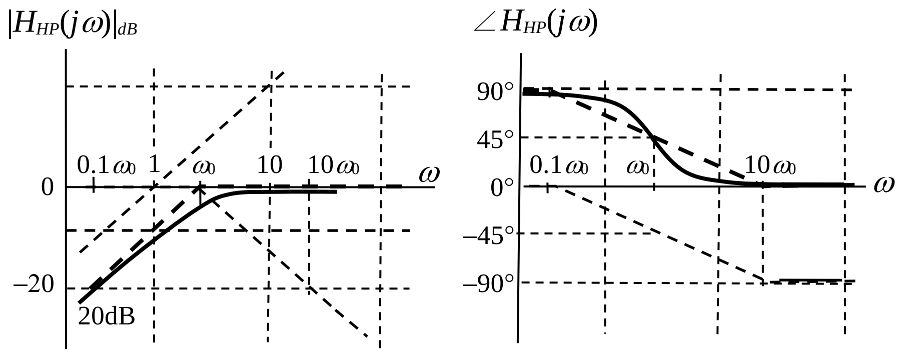


圖 5

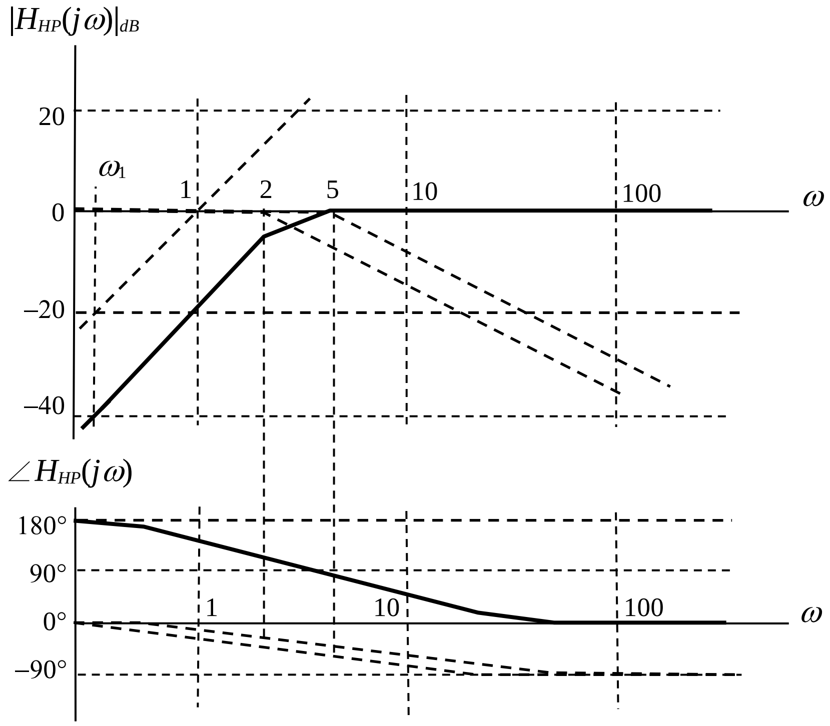

$|H_{HP}(j\omega)|_{dB}$
20
0
–20
–40
ω_1
1
2
5
10
100
ω
$\angle H_{HP}(j\omega)$
180°
90°
0°
–90°
1
10
100
ω

圖 6

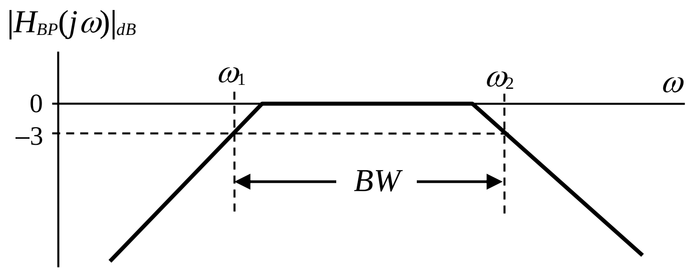

$|H_{BP}(j\omega)|_{dB}$
0
–3
ω_1
ω_2
ω
BW

圖 7