SS15. 系統數學模式化—輸入輸出描述法

在工程領域中，探討線性非時變(LTI)系統時，必須先推導其數學模式，即所謂的系統數學模式化(system mathematic modeling)，而最基本的型式就是輸出輸入描述法(input-output description，簡稱 IOD)，所採用的正是 ODE-CC，數學模式如下所示：

(1)
$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t) \\ &=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t) \end{aligned}$$

其中 $y(t)$ 為輸出，$u(t)$ 是已知的輸入訊號，a_k 與 b_l 都是常數，且 $b_m \neq 0$。

此外，一般的系統通常都是適當系統(proper system)，所以滿足 $n \geq m$，而當 $n > m$ 時，則是嚴格適當系統(strictly proper system)。根據 ODE-CC 的性質，若給定輸入 $u(t)$ 與初值條件 $y^{(k)}(t_0)=y_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$，即可求得唯一的輸出 $y(t)$，$t \geq t_0$。

為了方便討論，令初始時間為 t_0=0，且為了納入在 t=0 時的脈衝輸入訊號，特別將輸出與輸入的初始條件修正為 $y_k=y^{(k)}(0^-)\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$ 與 $u_l=u^{(l)}(0^-)\big|_{l=0,1,\ldots,m-1}$，在此情況下，最常採用的數學工具是拉普拉斯轉換，對(1)式取拉氏轉換後可得

(2)
$$\begin{aligned} &s^nY(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^ky_{n-k-1}+a_{n-1}\left(s^{n-1}Y(s)-\sum_{k=0}^{n-2}s^ky_{n-k-2}\right) \\ &\quad+\cdots+a_1\big(sY(s)-y_0\big)+a_0Y(s) \\ &=b_m\left(s^mU(s)-\sum_{l=0}^{m-1}s^ku_{m-l-1}\right)+b_{m-1}\left(s^{m-1}U(s)-\sum_{l=0}^{m-2}s^ku_{m-l-2}\right) \\ &\quad+\cdots+b_1\big(sU(s)-u_0\big)+b_0U(s) \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}\{u(t)\}=U(s)$，$\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$，此式進一步整理後成為

(3)
$$\begin{aligned} &\left(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0\right)Y(s) \\ &=\left(b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0\right)U(s)+r_{n-1}s^{n-1}+\cdots+r_1s+r_0 \end{aligned}$$

其中 r_0、r_1、…、r_{n-1} 由輸出與輸入之初值 y_k 與 u_l 決定，再令

(4) $$P(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

(5) $$Q(s)=b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0$$

(6) $$R(s)=r_{n-1}s^{n-1}+\cdots+r_1s+r_0$$

則(3)式可改寫為 $P(s)Y(s)=Q(s)U(s)+R(s)$，或者是

(7) $$Y(s)=Y_I(s)+H(s)U(s)$$

其中

(8) $$H(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}\cdots+a_1 s+a_0}$$

(9) $$Y_I(s)=\frac{R(s)}{P(s)}=\frac{r_{n-1}s^{n-1}+\cdots+r_1 s+r_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}\cdots+a_1 s+a_0}$$

對(7)式取反拉式轉換，可得輸出如下所示：

(10) $$y(t)=y_i(t)+y_u(t)$$

其中 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$，$y_i(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_I(s)\}$，$y_u(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$。

一般的系統通常具有穩定性,使得與初值相關的 $y_i(t)$ 會隨著時間 t 的增加而逐漸減小且趨近於 0，換句話說，當 $t\gg 0$ 時，由於 $y_i(t)\to 0$，因此輸出可視為 $y(t)=y_u(t)$，不受初值的影響，表為

(11) $$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}U(s)$$
$$=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}U(s)$$

在數學上稱 $H(s)=\left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{R(s)=0}$ 為系統的轉移函數(transfer function)。

顯然地，為了求得系統的轉移函數 $H(s)$，可令系統初值為 0，並輸入脈衝訊號 $u(t)=\delta(t)$，由於

(12) $$U(s)=\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)e^{-s0}dt=1$$

因此可得

(13) $$Y_\delta(s)=H(s)U(s)\Big|_{U(s)=1}=H(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

故輸出為

(14) $$y_\delta(t)=h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

因為輸入為脈衝訊號，所以稱此時之輸出 $y_\delta(t)=h(t)$ 為脈衝響應，在系統理論中，脈衝響應 $h(t)$ 或轉移函數 $H(s)$ 常被用來代表 LTI 系統。

當輸入為 $u(t)$ 或 $U(s)$ 時，在不考慮初值的情況下，輸出為

(15) $$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}=h(t)*u(t)=\int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

若仍考慮初值，則為

(16) $$y(t)=y_i(t)+\int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

此式即為系統的全響應(total response)。

根據(16)式，在初值無法忽略的情況下，若輸入為 $u_1(t)$ 與 $u_2(t)$，則輸出分別為

(17) $$y_1(t)=y_{i1}(t)+\int_0^\infty h(t-\tau)u_1(\tau)d\tau$$

(18) $$y_2(t)=y_{i2}(t)+\int_0^\infty h(t-\tau)u_2(\tau)d\tau$$

若輸入為兩者之和，即 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$，則輸出為

(19) $$\begin{aligned} y(t)&=y_i(t)+\int_0^\infty h(t-\tau)\underbrace{\left(u_1(\tau)+u_2(\tau)\right)}_{u(\tau)}d\tau \\ &=y_1(t)+y_2(t)+\left(y_i(t)-y_{i1}(t)-y_{i2}(t)\right)\end{aligned}$$

顯然只有在 $y_i(t)-y_{i1}(t)-y_{i2}(t)=0$ 或忽略初值的條件下，$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$ 才成立，換句話說，以 ODE-CC 所描述的系統，實際上並不是一個線性系統，只有在系統初值不計的情況下才可視為線性系統。

例如當系統為穩定系統時，隨著時間遞增，其初值的影響遞減，最終可將初值予以忽略，並將其視為線性系統，故在系統工程中通常將微分方程式所描述的穩定系統，稱為遞增式線性非時變系統(incrementally LTI system)。

例題： 若系統以下列之常微分方程式描述：

$$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$$

系統初值為 $y(0)=1$、$\dot{y}(0)=0$，輸入為 $u(t)=sin(2t)$，則轉移函數為何？是否為穩定系統？輸出 $y(t)$ 為何？

解： 取拉氏轉換可得

$$\left(s^2+2s+1\right)Y(s)=U(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

整理後成為

$$Y(s)=\frac{2}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{\left(s+1\right)^2}+\frac{Cs+2D}{s^2+4}$$

其中 $A=\frac{4}{25}$ ，$B=\frac{2}{5}$ ，$C=-\frac{4}{25}$ ，$D=-\frac{3}{25}$ ，

故取反拉氏轉換後可得

$$\begin{aligned} y(t) &= Ae^{-t}+Bte^{-t}+C\cos 2t+D\sin 2t \\ &= \frac{4}{25}e^{-t}+\frac{2}{5}te^{-t}-\frac{4}{25}\cos 2t-\frac{3}{25}\sin 2t \end{aligned}$$