SS14. 常數係數常微分方程式

在工程領域中，常數係數常微分方程式(ordinary differential equation with constant coefficients，簡稱為 ODE-CC)，是分析動態系統不可或缺的數學工具，常被用來描述線性非時變(LTI)系統，其數學模式如下所示：

(1)
$$\alpha_n y^{(n)}(t)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+\alpha_1\dot{y}(t)+\alpha_0 y(t)$$
$$=\beta_m u^{(m)}(t)+\beta_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+\beta_1\dot{u}(t)+\beta_0 u(t)$$

其中 $y(t)$ 為輸出，$y^{(k)}(t)\big|_{k=0,1,\ldots,n}$ 是 $y(t)$ 的 k 次微分，α_k 是常數係數，若 $\alpha_n\neq 0$，即最高微分次數為 n，通常稱(1)式為 n 階 ODE-CC；而 $u(t)$ 是已知的輸入訊號，也是一個連續可微的函數，$u^{(l)}(t)\big|_{l=0,1,\ldots,m}$ 是 $u(t)$ 的 l 次微分，其係數 β_l 也都是常數，且 $\beta_m\neq 0$；在一般系統中，

當 $n\geq m$，稱為適當系統(proper system)
當 $n>m$，稱為嚴格適當系統(strictly proper system)
當 $n<m$，稱為非適當系統(improper system)

顧名思義，非適當系統是難以實現的系統，此外，若將(1)式所有的係數同除 α_n，則(1)式可改寫為

(2)
$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)$$
$$=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t)$$

其中 $a_k=\alpha_k/\alpha_n\big|_{k=0,1,2,\ldots,(n-1)}$，$b_l=\beta_l/\alpha_n\big|_{l=0,1,2,\ldots,m}$，在數學上稱此做法為”monic”，即將最高次之係數”單一化”，這種做法可讓系統的分析更加簡明。

根據 ODE-CC 的性質，若只給定輸入訊號 $u(t)$，則(2)式的解 $y(t)$ 雖然存在，但並非唯一，必須再設定 n 個與 $y(t)$ 相關的條件，才可以求得唯一的解，在實際系統中通常給定 n 個輸出的初值條件(initial conditions)，表為 $y^{(k)}(t_0)=y_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$，其中 $t=t_0$ 為系統的初始時刻，這也是實際系統中經常使用的條件。

總而言之，在給定輸入訊號 $u(t)$ 與初值條件 $y^{(k)}(t_0)=y_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$ 之後，即可求得唯一的輸出訊號 $y(t)$，$t\geq t_0$。

在求解時通常將 $y(t)$ 分解為與初值有關的齊次解(homogeneous solution)，以及與 $u(t)$ 有關的特殊解(particular solution)，表示式如下：

(3) $$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

其中齊次解 $y_h(t)$ 滿足下列之齊次方程式(homogeneous equation)：

(4) $$y_h^{(n)}(t)+a_{n-1}y_h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}_h(t)+a_0y_h(t)=0$$

而特殊解 $y_p(t)$ 則是滿足

(5) $$y_p^{(n)}(t)+a_{n-1}y_p^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}_p(t)+a_0y_p(t)=w(t)$$

其中

(6) $$w(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

顯然地，$y_p(t)$ 由輸入 $u(t)$ 來決定，而 $y_h(t)$ 則不受輸入的影響。

整個求解過程可分為三個階段：

(一) 根據(4)式求出 $y_h(t)$ 的通式，其中含有 n 個待解的未知數
(二) 根據(5)式求出一個特殊解 $y_p(t)$
(三) 利用初值條件 $y^{(k)}(t_0)=y_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$ 求出 $y_h(t)$ 通式中的未知數。

經過以上三個步驟的處理即可求得輸出 $y(t)$ 的唯一解。

底下針對整個求解過程作詳細之說明：

(一) 根據(4)式求出 $y_h(t)$ 的通式

由於(4)式與輸入 $u(t)$ 無關，因此 $y_h(t)$ 通常被視為與系統本性有關，且以指數函數的形式 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$ 來表示，其中 $A\neq 0$，λ 為常數，接著求出 $y_h(t)$ 各次的微分項 $y_h^{(k)}(t)=A\lambda^k e^{\lambda t}\big|_{k=1,2,\ldots,n}$，代入(4)式後成為

(7) $$A\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda t}=0$$

故

(8) $$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

此式即系統的特徵方程式(characteristic equation)，共有 n 個解 $\lambda_k\big|_{k=1,2,\ldots,n}$，稱為特徵值(eigenvalue)，這些特徵值可能是重根，也可能完全相異，為了方便說明，先討論所有的特徵值皆相異之情況。

當特徵值完全相異時，$y_h(t)$ 具有 n 種形式，表為 $A_k e^{\lambda_k t}\big|_{k=1,2,\ldots,n}$，不同的特徵值 λ_k

會有不同的係數 A_k 與之對應，亦即

(9) $$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t}$$

其中 A_k 與 λ_k 可能是實數，也可能是複數，且 A_k 為待決定之係數。

(二) 根據(5)式求出一個特殊解 $y_p(t)$

為了方便說明，以輸入 $u(t) = U$ 為例，U 為定值，在此情況下，通常假設特殊解亦為定值 Y_p，即 $y_p(t) = Y_p$，代入(5)式後可得

(10) $$a_0 Y_p = b_0 U$$

故 $y_p(t) = Y_p = \dfrac{b_0 U}{a_0}$，再由(3)式與(9)式可知

(11) $$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t} + \frac{b_0 U}{a_0}$$

(三) 利用初值條件 $y^{(k)}(t_0) = y_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$ 求出 $y_h(t)$ 通式中的未知數 $A_k\big|_{k=1,2,\ldots,n}$

利用初值條件 $y^{(k)}(t_0) = y_k\big|_{k=0,1,\ldots,n-1}$ 可得

(12) $$\begin{cases} y(t_0) = A_1 e^{\lambda_1 t_0} + A_2 e^{\lambda_2 t_0} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t_0} + \dfrac{b_0 U}{a_0} = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} + \cdots + A_n \lambda_n e^{\lambda_n t_0} = y_1 \\ \ddot{y}(t_0) = A_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t_0} + A_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t_0} + \cdots + A_n \lambda_n^2 e^{\lambda_n t_0} = y_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = A_1 \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t_0} + A_2 \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t_0} + \cdots + A_n \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t_0} = y_{n-1} \end{cases}$$

最後根據此式求出 n 個未知係數 $A_k\big|_{k=1,2,\ldots,n}$，即完成整個求解的過程。

以一階 ODE-CC 為例，當 $u(t) = U$，初值條件為 $y(t_0) = y_0$，則數學模式為

(13) $$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 U$$

並將 $y(t)$ 分解為

(14) $$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

其中 $y_h(t) = A e^{\lambda t}$ 與 $y_p(t) = Y_p$ 分別滿足

(15) $$\dot{y}_h(t) + a_0 y_h(t) = 0$$

(16) $\dot{y}_p(t)+a_0 y_p(t)=b_0 U$

由(15)式可求得特徵方程式 $\lambda+a_0=0$，即特徵根為 $\lambda=-a_0$，因此 $y_h(t)=Ae^{-a_0 t}$，再由(16)式可求得 $y_p(t)=\dfrac{b_0 U}{a_0}$，故

(17) $y(t)=Ae^{-a_0 t}+\dfrac{b_0 U}{a_0}$

最後利用初值條件可知 $Ae^{-a_0 t_0}+\dfrac{b_0 U}{a_0}=y_0$，整理後可得 $A=\left(y_0-\dfrac{b_0 U}{a_0}\right)e^{a_0 t_0}$，故求得(13)式的唯一解如下：

(18) $y(t)=\left(y_0-\dfrac{b_0 U}{a_0}\right)e^{-a_0(t-t_0)}+\dfrac{b_0 U}{a_0}$

以上是一階 ODE-CC 的求解過程。

在 ODE-CC 中，還有一些與齊次解 $y_h(t)$ 有關的重要觀念，必須做進一步的說明。由於 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$，當特徵值 λ>0 時，$y_h(t)$ 的大小將隨著時間增加而發散至∞，即 $|y_h(\infty)|\to\infty$；反之當特徵值 λ<0 時，$y_h(t)$ 將收斂至 0，即 $y_h(\infty)\to 0$；而當特徵值 λ=0 時，$y_h(t)=A$ 為常數，不會隨時間變動。

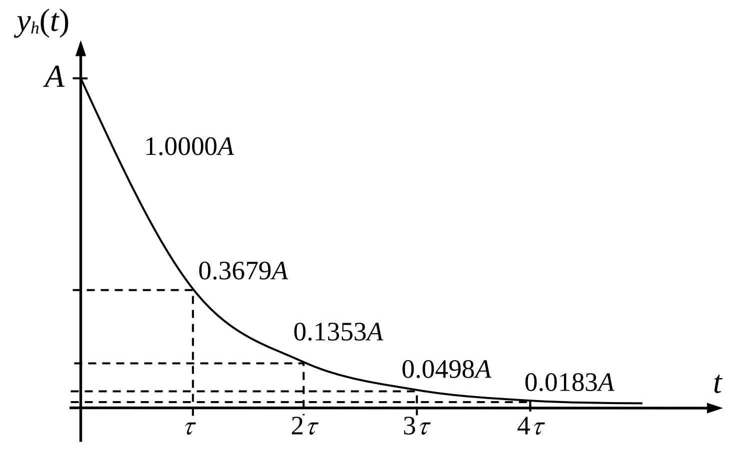

圖 1

當系統之特徵值 λ<0 時，$y_h(t)=Ae^{\lambda t}$ 會隨著時間的變動而收斂，如圖 1 所示，根據指數函數的特性，每經過一個固定時段 τ，它的值就會下降為固定的倍率 k，即 $y_h(t+\tau)=ky_h(t)$，當倍率 $k=e^{-1}$ 時，稱固定時段 τ 為時間常數(time constant)，表示式如下：

(19) $y_h(t+\tau)=e^{-1}y_h(t)=0.3679y_h(t)$

將 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$ 代入上式，可得 $Ae^{\lambda(t+\tau)}=e^{-1}\left(Ae^{\lambda t}\right)$，進一步整理後成為 $e^{\lambda\tau}=e^{-1}$，即$\lambda\tau=-1$，故時間常數

(20)　　$$\tau=-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{|\lambda|}$$

此外觀察圖 1 可知，當時間經過 $t=4\tau$時，已下降至原先的 $e^{-4}\approx 0.0183$ 倍，大約是 1/100 等級的倍率，這是在工程上常被視為可予以忽略的等級，因此經過 $t=4\tau$ 的訊號大小可用來當作訊號是否收斂的依據。

在系統理論中，通常稱$\lambda<0$ 的系統為穩定系統(stable system)，$\lambda>0$ 的系統為不穩定系統(unstable system)。對穩定系統而言，因為 $y_h(\infty)\to 0$，使得輸出 $y(t)$ 會隨著時間進展而漸漸與 $y_h(t)$ 無關，最後趨於穩態 $y(t)\to y_p(t)$。

再以二階的 ODE-CC 為例，當 $u(t)=U$，初值條件為 $y(t_0)=y_0$，$\dot{y}(t_0)=y_1$，則數學模式為

(21)　　$$\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0U$$

由於實際的系統都具有穩定性，因此只考慮 $a_0>0$ 與 $a_1>0$ 之情況，並且設定 $a_0=\omega_n^2$ 與 $a_1=2\alpha>0$，其中 $\omega_n>0$ 稱為自然頻率(natural frequency)，而 $\alpha>0$ 稱為阻尼常數(damping constant)，故(21)式可改寫為

(22)　　$$\ddot{y}(t)+2\alpha\,\dot{y}(t)+\omega_n^2\,y(t)=b_0U$$

根據 ODE-CC 的性質，$y(t)$可再分解為

(23)　　$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

其中 $y_h(t)$ 與 $y_p(t)$ 分別滿足

(24)　　$$\ddot{y}_h(t)+2\alpha\,\dot{y}_h(t)+\omega_n^2\,y_h(t)=0$$

(25)　　$$\ddot{y}_p(t)+2\alpha\,\dot{y}_p(t)+\omega_n^2\,y_p(t)=b_0U$$

整個的求解過程與一階的 ODE-CC 相同，仍然分為三個階段，在第一個步驟中令 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$，再將 $\dot{y}_h(t)=A\lambda e^{\lambda t}$ 與 $\ddot{y}_h(t)=A\lambda^2e^{\lambda t}$ 代入(24)式後成為

(26)　　$$A\left(\lambda^2+2\alpha\lambda+\omega_n^2\right)e^{\lambda t}=0$$

故特徵方程式為

(27)　　$$\lambda^2+2\alpha\lambda+\omega_n^2=0$$

當 $\alpha > \omega_n$ 時，特徵值為相異負實數 $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} < 0$，齊次解為

(28) $$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

當 $\alpha = \omega_n$ 時，特徵值為相同負實數 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha < 0$，齊次解為

(29) $$y_h(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t}$$

當 $\alpha < \omega_n$ 時，特徵值為共軛複數 $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\omega_d$，其中 $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$ 稱為阻尼自然頻率(damped natural frequency)，齊次解為

(30) $$y_h(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

觀察以上三式可知都具有兩個未知實數 A_1 與 A_2，後續在第三個步驟中再來決定。

接著進入第二步驟，由於輸入為定值，所以令 $y_p(t) = Y_p$ 也是定值，代入(25)式可得 $a_0 Y_p = b_0 U$，故

(31) $$y_p(t) = Y_p = \frac{b_0 U}{a_0}$$

綜合以上分析可知，當特徵值為相異負實數 $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ 時，輸出為

(32) $$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{b_0 U}{a_0}$$

當特徵值為相同負實數 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ 時，輸出為

(33) $$y(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} + \frac{b_0 U}{a_0}$$

當特徵值為共軛複數 $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\omega_d$ 時，輸出為

(34) $$y(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t) + \frac{b_0 U}{a_0}$$

最後在第三步驟中，利用 $y(t_0) = y_0$ 與 $\dot{y}(t_0) = y_1$ 的初值條件，來求得以上三式中的未知數 A_1 與 A_2，即完成整個求解過程。

在 α>0 的條件下，不論所求得的 A_1 與 A_2 為何，齊次解都會滿足 $y_h(\infty) \to 0$，也就是說，當 $t \to \infty$ 時，輸出為 $y(t) = y_p(t)$，與齊次解 $y_h(t)$ 無關，亦即不受初值的影響。

當系統滿足 $a_0 = \omega_n^2$ 與 $a_1 = 2\alpha > 0$ 時，齊次解 $y_h(t)$ 會隨著時間逐漸收斂，如圖 2

所示，在此圖中$T=\dfrac{2\pi}{\omega_n}$為共振之週期，$\xi=\dfrac{\alpha}{\omega_n}$為阻尼比(damping ratio)，當特徵值為共軛複數時，其條件$\alpha<\omega_n$可利用$\xi<1$來取代，同理，當特徵值相同時，以及特徵值為相異負實數時，兩者各自對應的條件$\alpha=\omega_n$與$\alpha>\omega_n$，可分別由$\xi=1$與$\xi>1$來取代。

在圖 2 中的各曲線就是以阻尼比來描述，其中包括$\xi=0$($\alpha=0$)之情形，雖然它不在討論的範圍內，但是該曲線可用來表達共振之波形，所以特別仍以虛線方式呈現在此圖中，其週期正好是 T。

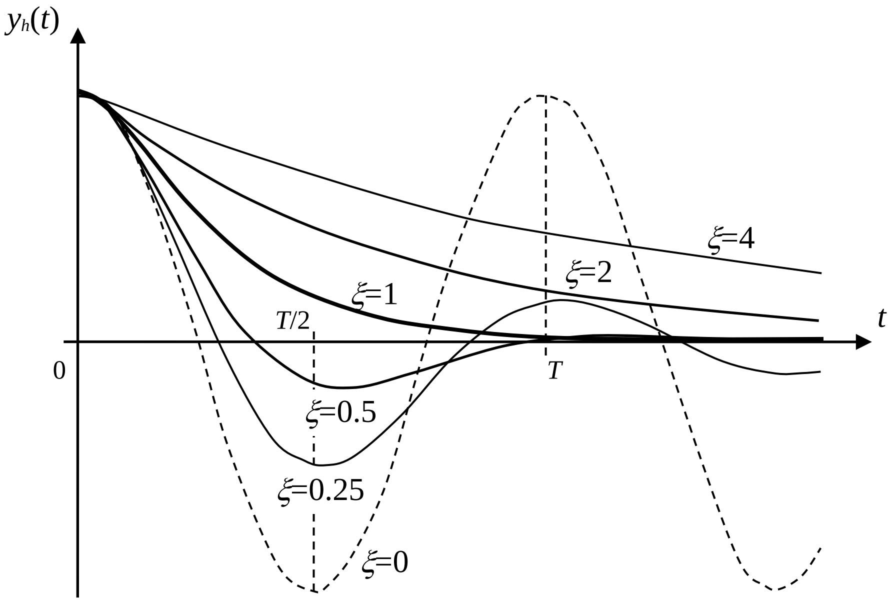

圖 2

觀察圖中實曲線可知，當特徵值為共軛複數時，即$\xi<1$，齊次解為振幅逐漸減弱至 0 的振盪波形，稱為欠阻尼解(underdamped solution)，應注意的是阻尼共振頻率$\omega_d=\sqrt{\omega_n^2-\alpha^2}=\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$，它會隨著$\xi$(或$\alpha$)的增大而逐漸變慢(或週期拉長)。

當特徵值為相同負實數時，即$\xi=1$，齊次解不再具有振盪之情況，且大小隨著時間逐漸減弱，最終趨近於 0，稱為臨界阻尼解(critically damped solution)。

當特徵值為相異負實數時，即$\xi>1$，齊次解亦為減弱之波形，最終趨近於 0，稱為過阻尼解(overdamped solution)，此外，在此情況下，齊次解減弱的趨勢會隨著ξ(或α)的增大而減緩。

若遇到更高階的 ODE-CC 或更複雜的輸入訊號，則以上的求解方式將不再適合，一般會採用拉普拉斯轉換，甚至直接採取數位模擬的方式來求解。