SS13. 拉普拉斯轉換

在處理 LTI 系統時，為了分析輸出與輸入訊號以及兩者間之關係，經常使用傅立葉轉換與拉普拉斯轉換(Laplace transform)，分別如下所示：

(1) $$\Im\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

(2) $$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

為了涵蓋在 t=0 時可能出現的脈衝訊號，兩者之積分下限皆為 $t = 0^-$，但不同的是拉普拉斯轉換使用複數變數 $s = \sigma + j\omega$，實部為 $Re(s) = \sigma \in R$，虛部為 $Im(s) = \omega \in R$。為了方便，後續將拉普拉斯轉換簡稱為拉氏轉換，根據(2)式之定義可知

(3) $$\begin{aligned}|F(s)| &= e^{-j\angle F(s)}F(s) = e^{-j\angle F(s)}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-j\angle F(s)}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} R_e\left(e^{-j\angle F(s)}f(t)e^{-st}\right)dt \le \int_{0^-}^{\infty}\left|e^{-j\angle F(s)}f(t)e^{-st}\right|dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty}\left|e^{-j\angle F(s)}f(t)e^{-\sigma t-j\omega t}\right|dt = \int_{0^-}^{\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|\underbrace{\left|e^{-j(\angle F(s)+\omega t)}\right|}_{=1}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|dt\end{aligned}$$

故在收斂性的考量下，$F(s)$必須滿足下列條件：

(4) $$|F(s)| \le \int_{0^-}^{\infty}\left|f(t)e^{-\sigma t}\right|dt = \int_{0^-}^{\infty}|f(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$$

稱 $F(s)$ 為絕對可積(absolutely integrable)，若訊號存在上限 $|f(t)| \le Ke^{\alpha t}$，其中 $K > 0$與$\alpha \in R$皆為常數，則(4)式可化為

(5) $$|F(s)| \le \int_{0^-}^{\infty}|f(t)|e^{-\sigma t}dt \le \int_{0^-}^{\infty} Ke^{-(\sigma-\alpha)t}dt < \infty$$

故只有在 $Re(s) = \sigma > \alpha$ 之條件下，$F(s)$ 才是絕對可積，通常稱 $Re(s) > \alpha$ 為 $F(s)$ 的收斂範圍(Region of convergence，簡稱 ROC)，因此完整之拉氏轉換應該表為

(6) $$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \qquad Re(s) > \alpha$$

其中α是能夠保證$F(s)$為絕對可積的常數，此常數與 $f(t)$ 息息相關。

若給定$F(s)$，則可利用反拉氏轉換(inverse Laplace transform)來求得 $f(t)$，如下所示：

(7) $$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

令 $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ，$\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$ ，其中 $f(t)\big|_{t<0}=0$ ，$g(t)\big|_{t<0}=0$ ，則拉氏轉換具有下列性質：

[P1] 線性： $\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=aF(s)+bG(s)$

驗證如下：

(8) $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}&=\int_{0^-}^{\infty}\big(af(t)+bg(t)\big)e^{-st}dt\\&=a\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt+b\int_{0^-}^{\infty}g(t)e^{-st}dt\\&=aF(s)+bG(s)\end{aligned}$$

故拉氏轉換是一種線性(linearity)運算。

[P2] 時間平移： $\mathcal{L}\{f(t-a)\}=e^{-as}F(s),\quad a>0$

驗證如下：

(9) $$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t-a)\big|_{a>0}\right\}&=\int_{0^-}^{\infty}f(t-a)e^{-st}dt\Big|_{\substack{\tau=t-a\\ d\tau=dt}}\\&=\int_{-a^-}^{\infty}f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau=e^{-as}\int_{0^-}^{\infty}f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\\&=e^{-as}F(s)\end{aligned}$$

故訊號的時間平移(time shifting)，亦即延遲 a，將使其拉氏轉換乘上 e^{-as} 。

[P3] $Re(s)$平移： $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}=F(s+a),\quad a\in R$

驗證如下：

(10) $$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{-at}f(t)\big|_{a\in R}\right\}&=\int_{0^-}^{\infty}e^{-at}f(t)e^{-st}dt\\&=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-(s+a)t}dt=F(s+a)\end{aligned}$$

故訊號乘上 e^{-at} 將導致拉氏轉換的 s 平移。

[P4] 壓縮與延展： $\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\quad a>0$

驗證如下：

(11) $$\mathcal{L}\left\{ f\left(at\right)\Big|_{a>0}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} f\left(at\right)e^{-st}dt\Big|_{\substack{\tau=at \\ \frac{1}{a}d\tau=dt}}$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} \frac{1}{a} f\left(\tau\right)e^{-s(\tau/a)}d\tau$$
$$= \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} f\left(\tau\right)e^{-s(\tau/a)}d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

故拉氏轉換具有壓縮與延展(compression and expansion)的性質。

<u>[P5] 對 t 微分</u>： $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f\left(0^-\right) - s^{n-2}\dot{f}\left(0^-\right) - \cdots - f^{(n-1)}\left(0^-\right)$

驗證如下：

(12) $$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f\left(t\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{ f^{(1)}\left(t\right)\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left(\frac{d}{dt} f\left(t\right)\right)e^{-st}dt$$
$$= \int_{0^-}^{\infty}\left(\frac{d}{dt} f\left(t\right)\right)e^{-st}dt = \int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st}df\left(t\right)$$
$$= \int_{t=0^-}^{\infty}\left(d\left(f\left(t\right)e^{-st}\right) - f\left(t\right)de^{-st}\right)$$
$$= \underbrace{f\left(\infty\right)e^{-s\infty}}_{=0} - f\left(0^-\right) + s\int_{t=0^-}^{\infty} f\left(t\right)e^{-st}dt$$
$$= sF\left(s\right) - f\left(0^-\right)$$

亦即

(13) $$\mathcal{L}\left\{ f^{(1)}\left(t\right)\right\} = sF\left(s\right) - f\left(0^-\right)$$

更高次微分如下：

(14) $$\mathcal{L}\left\{ f^{(2)}\left(t\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f^{(1)}\left(t\right)\right\} = s\mathcal{L}\left\{ f^{(1)}\left(t\right)\right\} - f^{(1)}\left(0^-\right)$$
$$= s\left(sF\left(s\right) - f\left(0^-\right)\right) - f^{(1)}\left(0^-\right)$$
$$= s^2F\left(s\right) - sf\left(0^-\right) - f^{(1)}\left(0^-\right)$$

(15) $$\mathcal{L}\left\{ f^{(3)}\left(t\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f^{(2)}\left(t\right)\right\} = s\mathcal{L}\left\{ f^{(2)}\left(t\right)\right\} - f^{(2)}\left(0^-\right)$$
$$= s\left(s^2F\left(s\right) - sf\left(0^-\right) - f^{(1)}\left(0^-\right)\right) - f^{(2)}\left(0^-\right)$$
$$= s^3F\left(s\right) - s^2 f\left(0^-\right) - sf^{(1)}\left(0^-\right) - f^{(2)}\left(0^-\right)$$

依此類推可得

(16) $$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f\left(0^-\right) - s^{n-2}\dot{f}\left(0^-\right) - \cdots - f^{(n-1)}\left(0^-\right)$$

故[P5]成立。

<u>[P6] 對 s 微分</u>： $\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$

驗證如下：

(17)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}&=(-1)\frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} t^{n-1} f(t) e^{-st}dt=(-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{t^{n-1} f(t)\right\}\\&=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\left\{t^{n-2} f(t)\right\}=\cdots\cdots\\&=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left\{t^{n-n} f(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)\\&=(-1)^n F^{(n)}(s)\end{aligned}$$

故[P6]成立。

<u>[P7] 初值定理</u>： $f\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

<u>[P8] 終值定理</u>： $f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s),\qquad f(\infty)$為定值

驗證以上兩式如下：

由於$\mathcal{L}\left\{\dfrac{d}{dt}f(t)\right\}=sF(s)-f\left(0^-\right)$，所以

(18)
$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} sF(s)&=f\left(0^-\right)+\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-st}dt\\&=f\left(0^-\right)+\lim_{\substack{s\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{0^-}^{\varepsilon} f'(t)e^{-st}dt+\lim_{\substack{s\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{\varepsilon}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt\\&=f\left(0^-\right)+\lim_{s\to\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0^-}^{\varepsilon} f'(t)\underbrace{e^{-st}}_{=1}dt\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty}\left(\lim_{s\to\infty} f'(t)\underbrace{e^{-st}}_{=0}\right)dt\\&=f\left(0^-\right)+\lim_{s\to\infty}\left(\int_{t=0^-}^{0^+} df(t)\right)+0=f\left(0^-\right)+\int_{t=0^-}^{0^+} df(t)\\&=f\left(0^-\right)+f\left(0^+\right)-f\left(0^-\right)=f\left(0^+\right)\end{aligned}$$

故[P7]初值定理(initial value theorem)成立，又因為

(19)
$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} sF(s)&=f\left(0^-\right)+\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt\\&=f\left(0^-\right)+\int_{0^-}^{\infty} f'(t)\underbrace{e^{-0\cdot t}}_{=1}dt=f\left(0^-\right)+\int_{0^-}^{\infty} f'(t)dt\\&=f\left(0^-\right)+f(\infty)-f\left(0^-\right)=f(\infty)\end{aligned}$$

故[P8]終值定理(final value theorem)成立。

[P9] 時域迴旋積： $\mathcal{L}\left\{f(t)*g(t)\right\}=F(s)G(s)$

驗證如下：

(20) $$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t)*g(t)\right\}&=\int_{0^-}^{\infty}\left(\int_{0^-}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt\Big|_{\substack{\lambda=t-\tau\\ d\lambda=dt}}\\&=\int_{0^-}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty}f(\tau)g(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda d\tau\\&=\left(\int_{0^-}^{\infty}f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)\left(\int_{0^-}^{\infty}g(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda\right)\\&=F(s)G(s)\end{aligned}$$

故[P9]成立。

在工程應用中有許多常見的訊號，為了方便處理，令這些訊號的啟始時刻為 $t=0$，並且以 $f(t)p(t)$ 來描述，其中 $p(t)$ 為步階訊號(step signal)，即 $p(t)\big|_{t\geq 0}=1$，$p(t)\big|_{t<0}=0$，底下列出常見訊號之拉氏轉換：[A1] $\mathcal{L}\left\{p(t)\right\}=\dfrac{1}{s}$, $Re(s)>0$

[A2] $\mathcal{L}\left\{t^n p(t)\right\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $Re(s)>0$

[A3] $\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\cos\beta t\cdot p(t)\right\}=\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$, $Re(s)>-\alpha$

[A4] $\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\sin\beta t\cdot p(t)\right\}=\dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$, $Re(s)>-\alpha$

[A5] $\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}p(t)\right\}=\dfrac{1}{s+\alpha}$, $Re(s)>-\alpha$

[A6] $\mathcal{L}\left\{\cos\beta t\cdot p(t)\right\}=\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$, $Re(s)>0$

[A7] $\mathcal{L}\left\{\sin\beta t\cdot p(t)\right\}=\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$, $Re(s)>0$

首先驗證[A1]如下：

(21) $$\mathcal{L}\{p(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}p(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}dt$$
$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0^-}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

再根據[P6]與[A1]，可得

(22) $$\mathcal{L}\{t^n p(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{p(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(s^{-1}\right)$$
$$=(-1)^n(-1)^n n!\,s^{-(n+1)}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

故[A2]得證。

關於[A3]與[A4]，先計算$e^{-(\alpha+j\beta)t}p(t)$的拉氏轉換：

(23) $$\mathcal{L}\left\{e^{-(\alpha+j\beta)t}p(t)\right\}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-(\alpha+j\beta)t}p(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}e^{-(s+\alpha+j\beta)t}dt$$
$$=-\frac{1}{s+\alpha+j\beta}e^{-(s+\alpha+j\beta)t}\Big|_{t=0^-}^{\infty}=\frac{1}{s+\alpha+j\beta}$$
$$=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}-j\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

由於

(24) $$\mathcal{L}\left\{e^{-(\alpha+j\beta)t}p(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\cos\beta t\cdot p(t)\right\}-j\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\sin\beta t\cdot p(t)\right\}$$

因此比較(23)與(24)兩式的實部及虛部後，可得到[A3]與[A4]之表示式。

關於[A5]、[A6]與[A7]，此三式都是[A3]與[A4]的特例，當$\beta=0$時，由[A3]可得

(25) $$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}p(t)\right\}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\Bigg|_{\beta=0}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2}=\frac{1}{s+\alpha}$$

亦即[A5]正確無誤。而當$\alpha=0$時，代入[A3]與[A4]即可獲得[A6]與[A7]之表示式。