SS12. 線性非時變系統

在工程問題中所處理的系統，通常是由系統本體 H、輸入訊號 $u(t)$與輸出訊號 $y(t)$所構成，如圖 1 所示，數學式如下：

(1) $$y(t)=H[u(t)]$$

其中 t 為時間變數，在實際狀況下，輸出 $y(t)\big|_{t\geq b}$ 是經由輸入 $u(t)\big|_{t\geq a}$ 之激發而得，因此必須滿足 $b\geq a$ 之條件，亦即輸出 $y(t)$的初始時刻 b，不得早於輸入 $u(t)$的初始時刻 a，這是輸入與輸出間的因果關係，以輸入為因、輸出為果，通常稱遵循此因果律 (causality) 的實際系統為因果系統 (causal system)。

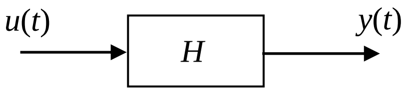

圖 1

最常見的系統是線性非時變系統(linear time-invariant system，簡稱 LTI 系統)，具有線性(linear)與非時變(time-invariance)兩種性質。

所謂線性是指輸出與輸入滿足重疊原理(superposition theorem)，說明如下：

令輸入 $u(t)$ 是另兩種輸入訊號 $u_1(t)$ 與 $u_2(t)$ 的線性組合，表為

(2) $$u(t)=\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)$$

其中 α_1 與 α_2 為任意常數，若滿足下列條件：(3)

$$H\left[\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)\right]=\alpha_1 H\left[u_1(t)\right]+\alpha_2 H\left[u_2(t)\right]$$

則稱 H 滿足重疊原理，為線性系統。也就是說，若 $y_k(t)=H\left[u_k(t)\right]_{k=1,2}$，則

(4) $$\begin{aligned} y(t)=H\left[u(t)\right]&=H\left[\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)\right]\\ &=\alpha_1 H\left[u_1(t)\right]+\alpha_2 H\left[u_2(t)\right]\\ &=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\end{aligned}$$

即輸出 $y(t)$ 也是 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 的線性組合。

若線性系統的輸入個數更多，如 $u_k(t)\big|_{k=1,2,\ldots,m}$，其個別輸出為 $y_k(t)=H\left[u_k(t)\right]$，則當系統之輸入為 $u(t)=\sum_{k=1}^{m}u_k(t)$ 時，其輸出可表為

(5) $$y(t)=H\left[u(t)\right]=H\left[\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k H\left[u_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k y_k(t)$$

以上是線性系統的特性。

所謂非時變是指當輸入的時刻平移τ時，即輸入為$u(t-\tau)$，則輸出的時刻也相對平移τ，表為(6) $y(t-\tau)=H[u(t-\tau)]$這個性質代表系統的運作與輸入時刻無關，也就是說，輸出與輸入的關係並不會隨著時間的平移而改變。

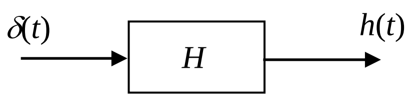

圖 2

當輸入為脈衝訊號$u(t)=\delta(t)$，令輸出為$h(t)$，即(7) $y(t)=H\left[\delta(t)\right]\equiv h(t)$

稱$h(t)$為脈衝響應(impulse response)，如圖 2 所示，在系統工程中，通常將脈衝響應$h(t)$用來代表 LTI 系統，而且在數學上也已經證明：

"當輸入為$u(t)$時，輸出$y(t)$為脈衝響應$\delta(t)$與輸入$u(t)$的迴旋積。"

亦即(8) $y(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$

為了說明(8)式確實成立，首先驗證以下之運算：(9)

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\delta(t-\tau)\,d\tau=u(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}_{=1}=u(t)$$

換句話說，對任意輸入$u(t)$而言，可將其表為

(10) $$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

若將此式的積分切割為無窮多極小訊號的組合，即$\tau=k\,\Delta\tau$，$d\tau=\Delta\tau\to 0$，則(10)式等效於

(11) $$u(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k\,\Delta\tau)\delta(t-k\,\Delta\tau)\,\Delta\tau=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k v_k(t)$$ 其中 $\alpha_k=u(k\,\Delta\tau)\Delta\tau$

為常數，$v_k(t)=\delta(t-k\,\Delta\tau)$，可得輸出如下所示：

(12) $y(t)=H\left[u(t)\right]=\lim_{\Delta\tau\to 0}H\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k v_k(t)\right]$ 由於 LTI 系統是一個線性系統，必須滿足(5)式，因此(13) $y(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}H\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k v_k(t)\right]=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k H\left[v_k(t)\right]$

$$=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k\,\Delta\tau)H\left[\delta(t-k\,\Delta\tau)\right]\Delta\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)H\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau$$

又因為 LTI 系統是一個非時變系統，所以再根據(6)式可得(14) $h(t-\tau)=H\left[\delta(t-\tau)\right]$

代入(13)式後成為(15) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau=h(t)*u(t)$ 故(8)式確實成立。由於迴旋積具有交換率，因此(15)式可改寫為(16) $y(t)=h(t)*u(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$ 根據 SS11-[P5]可知對(16)式取取傅立葉轉換可得(17) $\Im\{y(t)\}=\Im\{h(t)*u(t)\}=\Im\{h(t)\}\Im\{u(t)\}$

亦即(18) $\hat{y}(\omega)=\hat{h}(\omega)\hat{u}(\omega)$

其中 $\Im\{y(t)\}=\hat{y}(\omega)$，$\Im\{h(t)\}=\hat{h}(\omega)$，$\Im\{u(t)\}=\hat{u}(\omega)$。在實際系統中，通常以 t=0 為系統輸入的初始時刻，即 $u(t)\big|_{t<0}=0$，因此可將(15)式中的積分範圍修正如下：(19) $y(t)=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$ 在遵循因果律之情況下，若以啟動時刻為 t=0 的脈衝訊號 $\delta(t)$ 為輸入，則輸出的脈衝響應 $h(t)$ 也必須出現在 t=0 之後，亦即滿足 $h(t)\big|_{t<0}=0$，或 $h(t-\tau)\big|_{\tau>t}=0$，故(19)式的積分範圍可再修正為(20) $y(t)=\int_{0}^{t}h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$ 這是在 SS01 中所提到的双變數跑動式積分。

最後應注意的是，若系統輸入脈衝訊號 $\delta(t)$，則(20)式應再修正為(21) $y(t)=\int_{0^-}^{t}h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$ 亦即將積分下限表為 $t=0^-$，代表此積分運算涵蓋了 t=0 時所出現的脈衝訊號，由於脈衝訊號為理想訊號，通常只用於理論分析，在實際狀況下並不會出現。

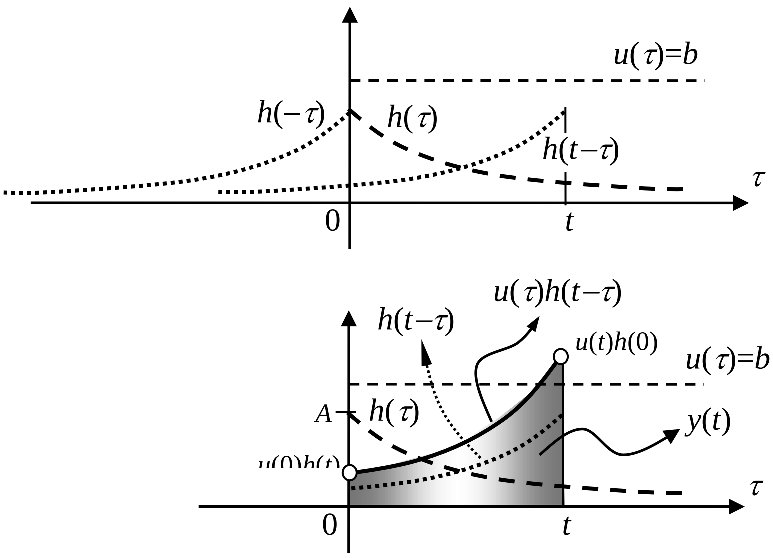

圖 3

底下舉例說明迴旋積的運算方式：令 LTI 系統在 t=0 時才開始啟動，且脈衝響應為 $h(t)=Ae^{-at}$，輸入為 $u(t)=b$，其中 a 與 b 皆為定值，且 a>0，則輸出為(22)

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \qquad =\int_0^t bAe^{-a(t-\tau)}\,d\tau=\frac{bA}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

其運算如圖 3 所示，首先將 $h(\tau)$ 平行翻轉為 $h(-\tau)$，再將 $h(-\tau)$ 向右平移 t 成為 $h(-(\tau-t))$=$h(t-\tau)$，之後求積分 $\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$ 即可得 $y(t)$。