SS11. FT—傅立葉轉換性質

令 $\hat{f}(\omega)=\Im\{f(t)\}$ 與 $\hat{g}(\omega)=\Im\{g(t)\}$，傅立葉轉換具有下列之性質：

[P1] 線性： $\Im\{af(t)+bg(t)\}=a\hat{f}(\omega)+b\hat{g}(\omega)$

驗證如下：

(1)
$$\begin{aligned}\Im\{af(t)+bg(t)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(af(t)+bg(t)\right)e^{-j\omega t}dt\\&=a\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt+b\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt\\&=a\hat{f}(\omega)+b\hat{g}(\omega)\end{aligned}$$

故傅立葉轉換可執行線性(linearity)運算。

[P2] 時間平移： $\Im\{f(t-t_0)\}=e^{-j\omega t_0}\hat{f}(\omega)$

驗證如下：

(2)
$$\begin{aligned}\Im\{f(t-t_0)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt\bigg|_{\substack{\tau=t-t_0\\ d\tau=dt}}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}d\tau\\&=e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=e^{-j\omega t_0}\hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

當訊號的時間平移(time shifting)時，每當延遲 t_0，傅立葉轉換就必須乘上 $e^{-j\omega t_0}$。

[P3] 頻率平移： $\Im\{e^{j\omega_0 t}f(t)\}=\hat{f}(\omega-\omega_0)$

驗證如下：

(3)
$$\begin{aligned}\Im\{e^{j\omega_0 t}f(t)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}f(t)e^{-j\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=\hat{f}(\omega-\omega_0)\end{aligned}$$

當訊號乘上 $e^{j\omega t_0}$，傅立葉轉換會產生 ω_0 的頻率平移(frequency shifting)。

[P4] 壓縮與延展： $\Im\left\{f\left(at\right)\right\}=\dfrac{1}{a}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right),\quad a>0$

驗證如下：

(4)
$$\Im\left\{f\left(at\right)\Big|_{a>0}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(at\right)e^{-j\omega t}dt\Bigg|_{\substack{\tau=at\\ d\tau/a=dt}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}f\left(\tau\right)e^{-j\omega(\tau/a)}d\tau$$
$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\tau\right)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}d\tau=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

故傅立葉轉換具有壓縮/延展(compression/expansion)之性質。

[P5] 時域迴旋積： $\Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau\right\}=\hat{f}\left(\omega\right)\hat{g}\left(\omega\right)$

驗證如下：

(5)
$$\Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau\right)e^{-j\omega t}dt\Bigg|_{\substack{\alpha=t-\tau\\ d\alpha=dt}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\alpha\right)g\left(\tau\right)d\tau\right)e^{-j\omega(\alpha+\tau)}d\alpha$$

進一步整理可得

(6)
$$\Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g\left(\tau\right)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)f\left(\alpha\right)e^{-j\omega\alpha}d\alpha$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}\left(\omega\right)f\left(\alpha\right)e^{-j\omega\alpha}d\alpha$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\alpha\right)e^{-j\omega\alpha}d\alpha\right)\hat{g}\left(\omega\right)$$
$$=\hat{f}\left(\omega\right)\hat{g}\left(\omega\right)$$

故兩訊號執行迴旋積(convolution)運算時，其結果的傅立葉轉換等於兩訊號個別的傅立葉轉換乘積。

[P6] 頻域迴旋積： $\Im\left\{f(t)g(t)\right\}=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-\Omega)\hat{g}(\Omega)d\Omega$

驗證如下：

由於 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\alpha)e^{j\alpha t}d\alpha$，因此

(7)
$$\Im\left\{f(t)g(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\alpha)e^{j\alpha t}d\alpha}_{f(t)}\,g(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\alpha)g(t)e^{-j(\omega-\alpha)t}d\alpha dt\Big|_{\substack{\Omega=\omega-\alpha\\ d\Omega=-d\alpha}}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-\Omega)g(t)e^{-j\Omega t}d\Omega dt$$

進一步整理可得

(8)
$$\Im\left\{f(t)g(t)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-\Omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\Omega t}dt\right)d\Omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-\Omega)\hat{g}(\Omega)d\Omega$$

故兩訊號乘積的傅立葉轉換等於兩訊號傅立葉轉換迴旋積的 $\dfrac{1}{2\pi}$ 倍。

對一般時域訊號 $f(t)\in R$ 而言，其瞬時功率可表為 $f^2(t)$，但若是將此訊號擴展至複數型式 $f(t)\in C$，則瞬時功率應轉換為

(9)
$$\left|f(t)\right|^2=f(t)f^*(t)$$

其中

(10)
$$f^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

計算總能量如下：

(11)
$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{*}(\omega)\,\hat{f}(\omega)\,d\,\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^{2} d\,\omega$$

故

(12) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^{2}(t)\,d\,t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^{2} d\,\omega$$

此式為傅立葉轉換的帕塞瓦爾定理(Parseval's theorem)。