SS10. FT—傅立葉轉換公式與頻譜

由於一般的非週期性訊號無法用傅立葉級數來描述，為了解決此問題，在數學上改用傅立葉轉換(Fourier transform，簡稱 FT)。

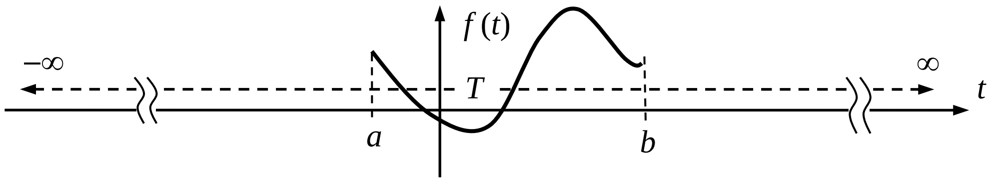


圖 1

在觀念上傅立葉轉換是傅立葉級數的延伸，所依據的是將非週期性訊號視為週期 $T\to\infty$ 的週期訊號，以圖 1 之有限區間訊號 $f(t)$ 為例，即是將此非週期性訊號視為每隔 $T\to\infty$ 會重複出現一次的週期性訊號，因此 $f(t)$ 可表為傅立葉級數，如下所示：

(1) $$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

其中基頻 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}\to 0$，係數 c_k 表為

(2) $$c_k=\frac{1}{T}\int_T f(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_T f(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau$$

將此係數代入(1)式後可得

(3) $$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau\right)e^{jk\omega_0 t}\Bigg|_{T\to\infty}$$

令 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\Delta\omega\to 0$ ， $k\omega_0=k\Delta\omega\to\omega$ ，則(3)式可改寫為

(4) $$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right)e^{j\omega t}\Delta\omega$$

此時ω可視為連續頻率的變數，在此概念下定義 $\Delta\omega\equiv d\omega$， $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}$ ，並將上式進一步化為

(5) $$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right)e^{j\omega t}d\omega$$

再令

(6) $$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

則(5)式可表為

(7) $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

在數學上稱 $\hat{f}(\omega)$ 為 $f(t)$ 的傅立葉轉換，而 $f(t)$ 為 $\hat{f}(\omega)$ 的反傅立葉轉換(inverse Fourier transform，簡稱 IFT)，通常以下列之運算符號來表示：

<u>傅立葉轉換(FT)</u>

(8) $$\Im\{f(t)\}=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

<u>反傅立葉轉換(IFT)</u>

(9) $$\Im^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

由於傅立葉轉換 $\hat{f}(\omega)$ 為複數，因此可表振幅−相位之型式如下：

(10) $$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\left|\hat{f}(\omega)\right|\,e^{j\phi(\omega)}$$

其中 $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ 為振幅，$\phi(\omega)$ 為相位，兩者都是頻率 ω 的函數，所畫出的函數圖即所謂的頻譜圖(spectrum)，是工程分析的重要工具。此外，由(10)式可知

(11) $$\hat{f}(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt=\hat{f}^{*}(\omega)$$

亦即

(12) $$\left|\hat{f}(-\omega)\right|\,e^{j\phi(-\omega)}=\left|\hat{f}(\omega)\right|\,e^{-j\phi(\omega)}$$

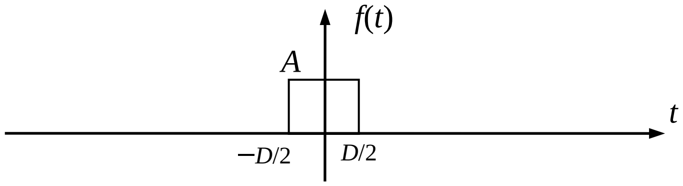
故

(13) $$\left|\hat{f}(-\omega)\right|=\left|\hat{f}(\omega)\right|$$

(14) $$\phi(-\omega)=-\phi(\omega)$$

以上兩式代表振幅 $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ 是一個偶函數，相位 $\phi(\omega)$ 是一個奇函數。

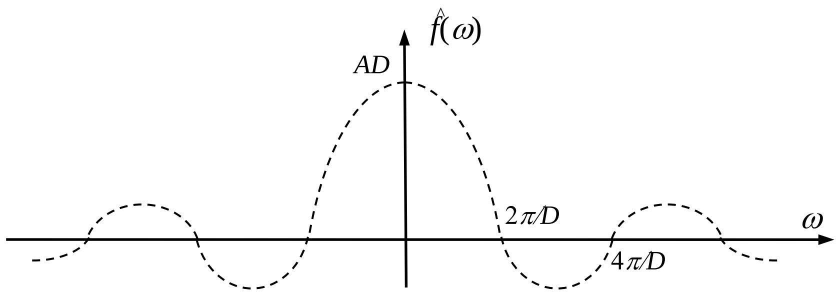
例題： 給定訊號如下：



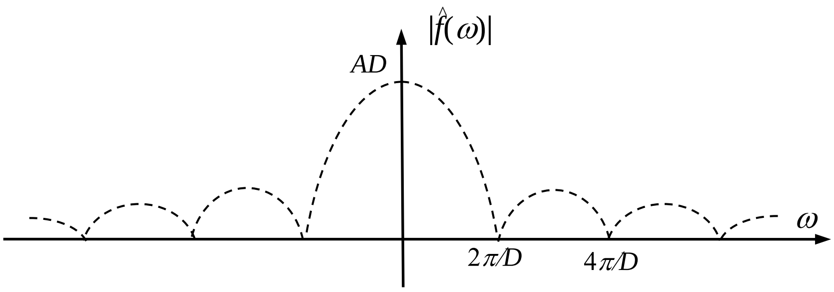
求傳立葉轉換 $\hat{f}(\omega)$，並畫出頻譜圖 $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ 與 $\phi(\omega)$。

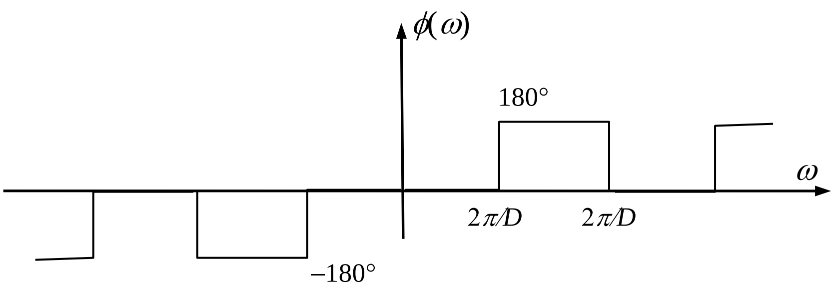
解： 根據(10)式可得傳立葉轉換如下：

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-D/2}^{D/2} Ae^{-j\omega t}dt \\
&= AD\frac{sin(\omega D/2)}{\omega D/2} = AD\,sin\,c\left(\frac{\omega D}{2}\right)
\end{aligned}
$$



故頻譜圖 $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ 與 $\phi(\omega)$ 如下所示：





根據此頻譜可知，若有限區間訊號 $f(t)$ 的時段寬度(duration)為 D，則傳立

葉轉換 $\hat{f}(\omega)$ 的能量主要集中在中央區域 $-\dfrac{2\pi}{D}<\omega<\dfrac{2\pi}{D}$，其寬度 $\dfrac{4\pi}{D}$ 可視為頻寬(bandwidth，記為 BW)，即 $BW=\dfrac{4\pi}{D}$，故對有限區間訊號而言，頻寬 BW 與時段寬度 D 成反比，亦即訊號出現的時間越短，其頻寬越大。

事實上，傳立葉轉換除了可用來描述非週期性函數外，也適用於週期函數 $f(t)$，其傳立葉級數為 $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$，若取傳立葉轉換則可得

(15) $$\hat{f}(\omega)=\Im\{f(t)\}=\Im\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\Im\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

其中

(16) $$\Im\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-k\omega_0)t}\,d\omega$$

由於此式之複數積分無法直接計算，通常用 $\delta(\omega-k\omega_0)$ 的反傳立葉轉換(IFT)來求得，如下所示：

(17) $$\Im^{-1}\{\delta(\omega-k\omega_0)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega$$

其中 $\delta(\bullet)$ 為脈衝函數(impulse function)，滿足以下兩個條件：

[C1] $\delta(\omega)=0,\quad \omega\in R,\ \omega\neq 0$

[C2] $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)=1$

計算下式：

(18) $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\,d\omega\\&=e^{jk\omega_0 t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)\,d\omega}_{=1}=e^{jk\omega_0 t}\end{aligned}$$

再代回(17)式可得

(19) $$\Im^{-1}\{\delta(\omega-k\omega_0)\}=\frac{1}{2\pi}e^{jk\omega_0 t}$$

其反運算之結果如下所示：

(20)　　$\Im\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta\left(\omega - k\omega_0\right)$

故根據(16)與(20)兩式，下列之恆等式成立：

(21)　　$\Im\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0)t}\, d\,\omega = 2\pi\delta\left(\omega - k\omega_0\right)$

當 k=0 時，可得

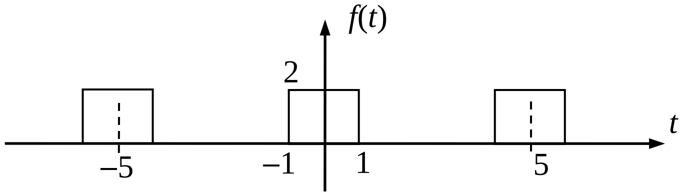
(22)　　$\Im\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, d\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\,\omega = 2\pi\delta\left(\omega\right)$

將(21)式代入(15)式，週期訊號 $f\left(t\right)$ 的傅立葉轉換表為

(23)　　$\hat{f}\left(\omega\right) = \left|\hat{f}\left(\omega\right)\right| e^{j\phi(\omega)} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(\omega - k\omega_0\right)$

其中 $c_k = \dfrac{1}{T}\int_T f\left(t\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$，故週期訊號 $f\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ 的頻譜 $\left|\hat{f}\left(\omega\right)\right|$ 與 $\phi\left(\omega\right)$ 是離散的(discrete)，只存在於單一的個別頻率 $\omega = k\omega_0$。

例題： 給定週期訊號如下：



(A)　求 $\hat{f}\left(\omega\right)$

(B)　畫出此訊號之頻譜 $\left|\hat{f}\left(\omega\right)\right|$ 與 $\phi\left(\omega\right)$

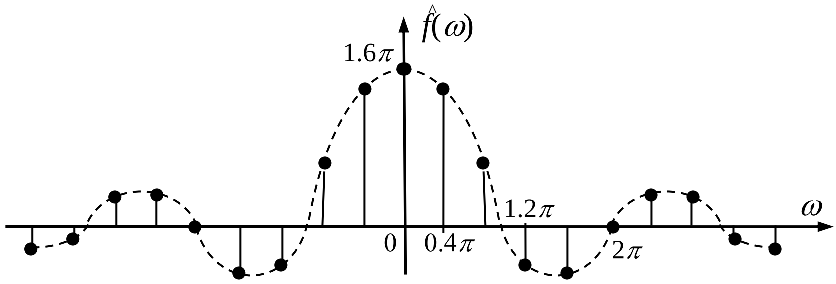
解： (A) 週期 $T = 5$，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 0.4\pi$，傅立葉級數為 $f\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$，其中

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T f\left(t\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = 0.8\frac{sin\left(0.4k\pi\right)}{0.4k\pi} = 0.8\,sinc\left(0.4k\pi\right)$$

根據(20)式，若對 $f\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ 取傅立葉轉換，則

$$\hat{f}\left(\omega\right) = \left|\hat{f}\left(\omega\right)\right| e^{j\phi(\omega)} = 1.6\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} sinc\left(0.4k\pi\right)\delta\left(\omega - 0.4k\pi\right)$$

其函數圖如下：



(B) 根據 $\hat{f}(\omega)$ 可知

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = 1.6\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|sinc(0.4k\pi)\right| \delta(\omega - 0.4k\pi)$$

$\phi(\omega) = 0$ 或 $\pm 180°$

故此訊號之頻譜 $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ 與 $\phi(\omega)$ 如下圖所示：