SS09. FS—帕塞瓦爾定理與吉布斯現象

通常一個 CT 訊號的瞬時功率是以 $f^2(t)$ 來表示，而在有限區間 $t\in[a,b]$ 的平均功率則為

(1) $$P_D=\frac{1}{D}\int_a^b f^2(t)\,dt=\frac{1}{D}\int_D f^2(t)\,dt,\qquad D=b-a$$

若 $f(t)$ 為週期訊號，則一個週期 T 的平均功率為

(2) $$P_T=\frac{1}{T}\int_T f^2(t)\,dt$$

利用複數型傅立葉級數，即 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$ ，其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ ，可得

(3) $$\begin{aligned}P_T&=\frac{1}{T}\int_T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\right)dt\\&=\frac{1}{T}\int_T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{-m} e^{-jm\omega_0 t}\right)dt\end{aligned}$$

由於 $c_{-m}=c_m^*$ ，上式可改寫為

(4) $$\begin{aligned}P_T&=\frac{1}{T}\int_T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m^* e^{-jm\omega_0 t}\right)dt\\&=\frac{1}{T}\int_T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_k c_m^* e^{j(k-m)\omega_0 t}\right)dt\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_k c_m^*\left(\frac{1}{T}\int_T e^{j(k-m)\omega_0 t}dt\right)\end{aligned}$$

(5) $$\frac{1}{T}\int_T e^{j(k-m)\omega_0 t}dt=\begin{cases}1\,, & k=m\\ 0\,, & k\neq m\end{cases}$$

因此在(4)式中只存在 $m=k$ 的項，亦即

(6) $$P_T=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_k c_m^*\left(\frac{1}{T}\int_T e^{j(k-m)\omega_0 t}dt\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k c_k^*=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k\right|^2$$

故週期訊號 $f(t)$ 的平均功率為

(7) $$P_T=\frac{1}{T}\int_T f^2(t)\,dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k\right|^2$$

此式在數學上稱為帕塞瓦爾定理(Parseval's theorem)。

在工程應用時常用有限個弦波函數和來取代原週期信號，表示式如下：

(8) $$f_N(t)=A_0+\sum_{n=1}^{N}\left(A_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+B_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

其中 N 為所使用的最高諧波次數，則 $f_N(t)$ 所造成的誤差為

(9) $$e(t) = f(t) - f_N(t)$$

在理論上誤差的大小 $|e(t)|$ 應該會隨著 N 的增加而逐漸獲得改善，然而這種預期的改善情況卻只發生在 $f(t)$ 的連續點上，當 $f(t)$ 存在不連續斷點時，在斷點的兩側會產生振盪向外衰減的波動現象，且最大過衝量(overshoot)的波峰會隨著 N 的增加，越往斷點靠近，不僅如此，此峰值會維持約略的定值，未因 N 的增加而減少，這就是吉布斯於 1899 年所提出的吉布斯現象(Gibbs phenomenon)，此現象闡明斷點兩側的誤差不會隨著 N 的增加而獲得改善。

吉布斯所提推導出來的結果如下所示：

若 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 處存在不連續斷點，且斷點兩側的差異為

(10) $$f(t_0^+) - f(t_0^-) = \alpha \neq 0$$

則

(11) $$\lim_{N\to\infty} f_N\left(t_0 + \frac{T}{2N}\right) = f(t_0^+) + \alpha \cdot (0.089489....)$$

(12) $$\lim_{N\to\infty} f_N\left(t_0 - \frac{T}{2N}\right) = f(t_0^-) - \alpha \cdot (0.089489....)$$

(13) $$\lim_{N\to\infty} f_N(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

例如：考慮週期訊號 $f(t) = f(t+4)$，且

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le 3 \\ -1, & 3 < t \le 4 \end{cases}$$

則傅立葉級數為

(14) $$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\frac{n\pi t}{2} + B_n sin\frac{n\pi t}{2}\right)$$

用來取代 $f(t)$ 的近似訊號為

(15) $$f_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n cos\frac{n\pi t}{2} + B_n sin\frac{n\pi t}{2}\right)$$

其中

(16) $$A_0 = \frac{1}{4}\left(\int_0^3 dt + \int_3^4 (-1) dt\right) = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2}$$

(17) $$A_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^3 cos\frac{n\pi t}{2}dt + \int_3^4 (-1)\, cos\frac{n\pi t}{2}dt\right) = \frac{2}{n\pi} sin\frac{3n\pi}{2}$$

(18) $$B_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^3 sin\frac{n\pi t}{2}dt + \int_3^4 (-1)\, sin\frac{n\pi t}{2}dt\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - cos\frac{3n\pi}{2}\right)$$

在圖 1 中顯示 N=25、N=50、N=100 的三條取代訊號 $f_{25}(t)$ 、 $f_{50}(t)$、 $f_{100}(t)$，觀察原訊號 $f(t)$ 在斷點 $t_0 = 3$ 與 $t_0 = 4$ 附近之圖形，由(13)式可知三條取代訊號在斷點處的值為

(19) $$f_N(t_0)\Big|_{N=25,50,100} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \frac{(-1)+(1)}{2} = 0$$

此外在斷點兩側都呈現振盪衰減的波動現象，N 越大時，最大過衝量會越靠近斷點，因此 $f_{100}(t)$ 的最大過衝量離斷點最近，接著利用(10)~(12)三式來計算峰值，在斷點 $t_0 = 3$ 附近

$$\alpha = f(t_0^+) - f(t_0^-) = -1 - 1 = -2$$

$$f_N\left(t_0 + \frac{T}{2N}\right)_{\substack{T=4 \\ N=25,50,100}} = f(t_0^+) + \alpha\cdot(0.089489....) = -1 - 0.179 = -1.179$$

$$f_N\left(t_0 - \frac{T}{2N}\right)_{\substack{T=4 \\ N=25,50,100}} = f(t_0^-) - \alpha\cdot(0.089489....) = 1 + 0.179 = 1.179$$

在斷點 $t_0 = 4$ 附近

$$\alpha = f(t_0^+) - f(t_0^-) = 1 - (-1) = 2$$

$$f_N\left(t_0 + \frac{T}{2N}\right)_{\substack{T=4 \\ N=25,50,100}} = f(t_0^+) + \alpha\cdot(0.089489....) = 1 + 0.179 = 1.179$$

$$f_N\left(t_0 - \frac{T}{2N}\right)_{\substack{T=4 \\ N=25,50,100}} = f(t_0^-) - \alpha\cdot(0.089489....) = -1 - 0.179 = -1.179$$

各峰值都約略保持定值，不會隨著 N 的不同而變動，符合吉布斯現象。

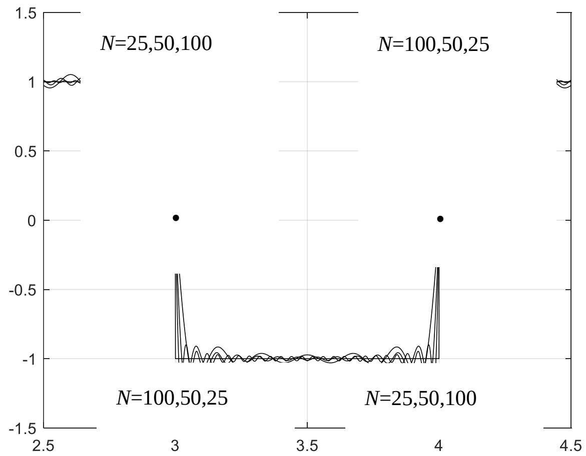
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
2.5
3
3.5
4
4.5
N=25,50,100
N=100,50,25
N=100,50,25
N=25,50,100

圖 1