SS08. FS—傅立葉級數頻譜

傅立葉級數可以將週期訊號拆解成弦波型式的諧波組合，各諧波的頻率為基頻的整數倍，在此頻率的特性下，頻譜(frequency spectrum)之概念乃因應而生，茲說明如下：

根據尤拉公式(Euler formula)：$e^{j\beta} = cos\,\beta + j\,sin\,\beta$ ，$\beta \in R$ ，可得

$$cos\,\beta = \frac{1}{2}\left(e^{j\beta} + e^{-j\beta}\right), \qquad sin\,\beta = -\frac{j}{2}\left(e^{j\beta} - e^{-j\beta}\right)$$

故傅立葉級數可改寫為複數型式如下：

(1)
$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, cos\, n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sin\, n\omega_0 t \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) - j\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - jb_n\right)e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + jb_n\right)e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

其中

(2)
$$a_0 = A_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt$$

(3)
$$a_n = \frac{1}{2}A_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,cos\, n\omega_0 t\; dt, \qquad n \in N$$

(4)
$$b_n = \frac{1}{2}B_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,sin\, n\omega_0 t\; dt, \qquad n \in N$$

若將(3)與(4)兩式中的 $n \in N$ 轉化為 $k \in Z$ ，亦即

(5)
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,cos\, k\omega_0 t\; dt, \quad b_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,sin\, k\omega_0 t\; dt, \quad k \in Z$$

則此轉化式不僅涵蓋了(2)~(4)三式且增添了 $b_0 = 0$ ，此外

(6)
$$a_{-k} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,cos(-k)\,\omega_0 t\; dt = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,cos\, k\omega_0 t\; dt = a_k$$

(7)
$$b_{-k} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,sin(-k)\,\omega_0 t\; dt = -\frac{1}{T}\int_T f(t)\,sin\, k\omega_0 t\; dt = -b_k$$

故(1)式可改寫為

(8)
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k - jb_k\right)e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty}\left(a_{-k} + jb_{-k}\right)e^{jk\omega_0 t}$$

再利用(6)與(7)兩式可得

(9) $$f(t)=(a_0-jb_0)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-jb_k)e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=-1}^{-\infty}(a_k-jb_k)e^{jk\omega_0 t}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)}$$

其中

(10) $$c_0=a_0-jb_0=a_0=|a_0|e^{j\theta_0}=|c_0|e^{j\theta_0}$$

(11) $$c_k=a_k-jb_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\ e^{-j\,tan^{-1}(b_k/a_k)}=|c_k|e^{j\theta_k},\quad k\neq 0$$

(12) $$|c_k|=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\quad k\in Z$$

(13) $$\theta_0=\begin{cases}0, & c_0\geq 0\\ \pi \text{ 或 } -\pi, & c_0<0\end{cases}$$

(14) $$\theta_k=-tan^{-1}\frac{b_k}{a_k},\quad k\neq 0$$

根據(6)與(7)兩式可知

(15) $$c_{-k}=a_{-k}-jb_{-k}=a_k+jb_k=c_k^*,\quad k\in Z$$

(16) $$\theta_{-k}=-tan^{-1}\frac{b_{-k}}{a_{-k}}=-tan^{-1}\frac{-b_k}{a_k}=tan^{-1}\frac{b_k}{a_k}=-\theta_k,\quad k\neq 0$$

其中(15)式可推得

(17) $$|c_{-k}|=|c_k^*|=|c_k|,\qquad k\in Z$$

故振幅$|c_k|$是一個偶函數。

應注意的是，對相位θ_k而言，即使$k\neq 0$時(16)式成立，也無法保證θ_k為奇函數，因為由(29)式可知只有在$c_0\geq 0$時$\theta_0=0$才成立，而$\theta_0=0$是讓θ_k成為奇函數的必要條件，故θ_k不一定是奇函數。不過，c_0是訊號的平均值，並不屬於諧波，沒有相位的意義，也就是說θ_0可予以忽略，仍將θ_k視為奇函數。

所謂週期訊號$f(t)$的頻譜就是由振幅$|c_k|$與相位θ_k所構成，兩者皆以$k\in Z$為變數，根據以上的分析可知振幅$|c_k|$是一個偶函數，滿足$|c_{-k}|=|c_k|$，而相位θ_k只有當$k\neq 0$時才滿足$\theta_{-k}=-\theta_k$，至於相位θ_0是由c_0的正負號來決定。

再針對c_k做進一步之說明，由(5)、(10)與(11)三式可知

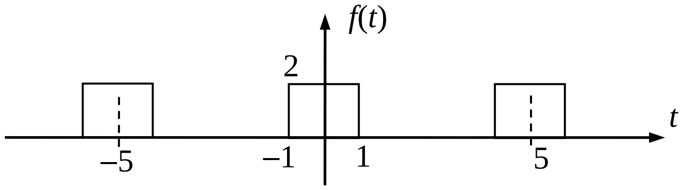
(18)
$$\begin{aligned} c_k &= a_k - jb_k \\ &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\left(\cos k\omega_0 t - j\sin k\omega_0 t\right)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{aligned}$$

這是c_k的複數積分型式，若利用(9)式之$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$，直接驗證(18)式，則可得

(19)
$$\begin{aligned} &\int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \int_T\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_T e^{j(n-k)\omega_0 t}dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_T \cos(n-k)\omega_0 t\,dt + j\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\underbrace{\int_T \sin(n-k)\omega_0 t\,dt}_{=0} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_T \cos(n-k)\omega_0 t\,dt = c_k\int_T dt = c_k T \end{aligned}$$

亦即$c_k=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$，故(18)式確實成立。

例題： 給定週期訊號如下：

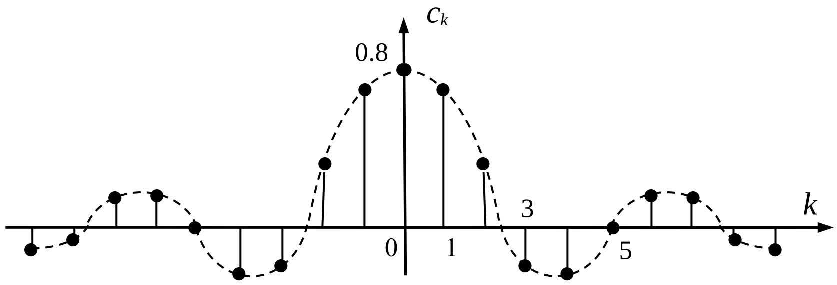


(A) 若$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$，求$\omega_0$與$c_k$各為何？

(B) 畫出此訊號之頻譜$|c_k|$與θ_k

解： (A) 由圖形可知週期$T=5$，因此基頻$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=0.4\pi$，再利用(19)式可得

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1}\left(2e^{-j0.4k\pi t}\right)dt \\ &= \frac{1}{-jk\pi}e^{-j0.4k\pi t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{k\pi}\sin(0.4k\pi) \\ &= 0.8\frac{\sin(0.4k\pi)}{0.4k\pi} = 0.8\,\mathrm{sinc}(0.4k\pi) \end{aligned}$$



(B) 由於 $c_k = 0.8\,sinc(0.4k\pi)$，因此

$$|c_k| = 0.8\ |sinc(0.4k\pi)|\text{ ， } \theta_k = 0 \text{ 或} \pm 180°$$

如下圖所示：