SS07. FS—傅立葉級數公式

傅立葉級數(Fourier series)是由十八世紀法國的數學家傅立葉所提出，利用弦波函數的組合來求解熱傳導方程式，在現代的工程應用中，傅立葉級數是處理 CT 週期訊號最常使用的數學工具。

在數學上已經證明若週期訊號 $f(t)\in R$ 滿足下列三個迪利希雷特(Dirichlet)條件：

[C1] 在一個週期中的不連續點為有限個

[C2] 在一個週期中的極大值與極小值為有限個

[C3] 在一個週期中為絕對可積，即 $\int_T |f(t)|\, dt < \infty$

則 $f(t)$ 可以表為傅立葉級數如下：

(1) $$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, cos\frac{2n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sin\frac{2n\pi t}{T}$$

其中所有的項皆為實數型，此式也可改寫為以下之型式：

(2) $$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, cos\, n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sin\, n\omega_0 t$$

(3) $$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, cos\, \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sin\, \omega_n t$$

(4) $$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, cos(\omega_n t - \Theta_n)$$

其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 為 $f(t)$ 的基頻(fundamental frequency)，$\omega_n = n\omega_0\big|_{n\in N}$ 為第 n 個諧波頻率(n-th harmonic frequency)，此外，(3)與(4)兩式間之轉換如下所示：

(5) $$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\left(\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\, cos\,\omega_n t + \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\, sin\,\omega_n t\right)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\,(cos\,\Theta_n\, cos\,\omega_n t + sin\,\Theta_n\, sin\,\omega_n t)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, cos(\omega_n t - \Theta_n)$$

其中

$$cos\Theta_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \text{，} sin\Theta_n = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

$$C_0 = A_0 \text{，} C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \text{，} \Theta_n = tan^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$$

稱 C_n 與 Θ_n 分別為第 n 個諧波的振幅(amplitude)與相位(phase)。

根據(1)式與 SS06-(3)~(5)三式，計算係數 A_0 、 A_n 與 B_n 如下：

(6) $$\int_T f(t)dt = \int_T A_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \underbrace{\int_T cos\frac{2n\pi t}{T}dt}_{=0} + B_n \underbrace{\int_T sin\frac{2n\pi t}{T}dt}_{=0} \right) = TA_0$$

(7) $$\int_T f(t)cos\frac{2n\pi t}{T}dt = A_0 \underbrace{\int_T cos\frac{2n\pi t}{T}dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_T cos\frac{2k\pi t}{T}cos\frac{2n\pi t}{T}dt$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} B_k \underbrace{\int_T sin\frac{2k\pi t}{T}cos\frac{2n\pi t}{T}dt}_{=0}$$
$$= A_n \int_T cos\frac{2n\pi t}{T}cos\frac{2n\pi t}{T}dt = \frac{T}{2}A_n$$

(8) $$\int_T f(t)sin\frac{2n\pi t}{T}dt = A_0 \underbrace{\int_T sin\frac{2n\pi t}{T}dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \underbrace{\int_T cos\frac{2k\pi t}{T}sin\frac{2n\pi t}{T}dt}_{=0}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_T sin\frac{2k\pi t}{T}sin\frac{2n\pi t}{T}dt$$
$$= B_n \int_T sin\frac{2n\pi t}{T}sin\frac{2n\pi t}{T}dt = \frac{T}{2}B_n$$

整理以上三式可得

(9) $$A_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt$$

(10) $$A_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)cos\frac{2n\pi t}{T}dt$$

(11) $$B_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)sin\frac{2n\pi t}{T}dt$$

其中 A_0 為 $f(t)$ 在一個週期 T 的平均值。

由於餘弦函數與正弦函數分別為偶函數與奇函數，若週期為 T 的偶函數訊號 $f_e(t)$ 與奇函數訊號 $f_o(t)$ 皆滿足迪利希雷特條件，則兩者可分別表為：

傅立葉餘弦級數(Fourier cosine series)

(12) $$f_e(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2n\pi t}{T}, \quad t \in (-\infty,\infty)$$

傅立葉正弦級數(Fourier sine series)

(13) $$f_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2n\pi t}{T}, \quad t \in (-\infty,\infty)$$

其中各係數為

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_T f_e(t)dt \text{ ， } A_n = \frac{2}{T}\int_T f_e(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_T f_o(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

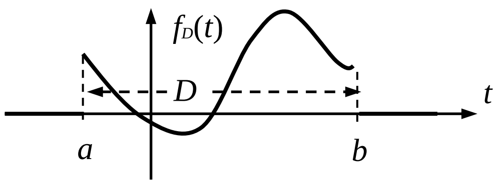

圖 1

在工程應用中所處理的實際訊號 $f_D(t)$ 僅存於 $t \in [a,b]$，即寬度為 $D = b - a$ 的有限區間，稱為有限區間訊號(finite duration signal)，如圖 1 所示，雖然 $f_D(t)$ 不是週期訊號，但也可以用傅立葉級數來表示，只是表示法並不唯一，說明如下：

考慮由圖 1 所延伸出來的兩種週期訊號，如圖 2 與圖 3 所示。

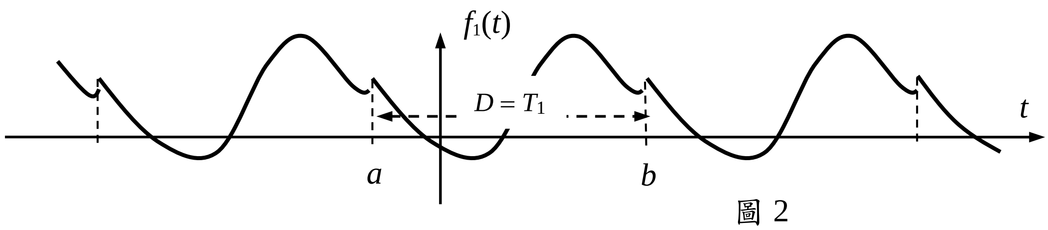

圖 2

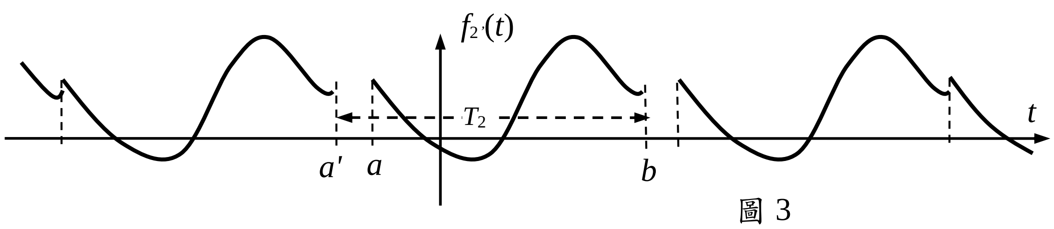

圖 3

在圖 2 中之週期訊號 $f_1(t)$ 可表為傅立葉級數如下：

(14) $$f_1(t)=A_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}cos\frac{2n\pi t}{T_1}+B_{1n}sin\frac{2n\pi t}{T_1}\right),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

其中$T_1=D$。

在圖 3 中之週期訊號 $f_2(t)$可表為傅立葉級數如下：

(15) $$f_2(t)=A_{20}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}cos\frac{2n\pi t}{T_2}+B_{2n}sin\frac{2n\pi t}{T_2}\right),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

其中$T_2>D$。

利用以上兩種週期訊號 $f_1(t)$與 $f_2(t)$之表示式，選取有限區間$t\in(a,b)$，可將 $f_D(t)$表為(16) $f_D(t)=f_1(t)=A_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}cos\frac{2n\pi t}{T_1}+B_{1n}sin\frac{2n\pi t}{T_1}\right)$, $t\in(a,b)$(17) $f_D(t)=f_2(t)=A_{20}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}cos\frac{2n\pi t}{T_2}+B_{2n}sin\frac{2n\pi t}{T_2}\right)$, $t\in(a,b)$

很明顯地，有限區間訊號 $f_D(t)$確實可以表為傅立葉級數，不過，表示法並不唯一，甚至有無限多種表示法。

不過應注意的是，在(16)與(17)兩式中的有限區間屬於開放區間，並不包含邊界點$t=a$與$t=b$，這是因為當邊界點為不連續點時，傅立葉級數在此邊界點必須另外探討。

例題： 考慮有限區間訊號如下：

$$f_D(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 3\\ -1, & 3<t\le 4\\ 0, & t\notin[0,4]\end{cases}$$

(A) 若 $f_1(t)=f_1(t+4)$，且當$t\in[0,4]$時， $f_1(t)=f_D(t)$
求 $f_D(t)$的傅立葉級數表示法。

(B) 若 $f_2(t)=f_2(t+6)$，且當$t\in[0,4]$時， $f_2(t)=f_D(t)$
當$t\in(4,6)$時， $f_2(t)=0$，求 $f_D(t)$的傅立葉級數表示法。

解： (A) 由於 $f_1(t)$的傅立葉級數為

$$f_1(t)=A_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}cos\frac{2n\pi t}{T_1}+B_{1n}sin\frac{2n\pi t}{T_1}\right)$$

其中$T_1=4$，且各係數為

$$A_{10}=\frac{1}{4}\left(\int_0^3 dt+\int_3^4(-1)dt\right)=\frac{1}{4}(3-1)=\frac{1}{2}$$
$$A_{1n}=\frac{2}{4}\left(\int_0^3 cos\frac{2n\pi t}{4}dt+\int_3^4(-1)cos\frac{2n\pi t}{4}dt\right)=\frac{2}{n\pi}sin\frac{3n\pi}{2}$$
$$B_{1n}=\frac{2}{4}\left(\int_0^3 sin\frac{2n\pi t}{4}dt+\int_3^4(-1)sin\frac{2n\pi t}{4}dt\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-cos\frac{3n\pi}{2}\right)$$

因此 $f_D(t)$ 可表為

$$f_D(t)=A_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}cos\frac{n\pi t}{2}+B_{1n}sin\frac{n\pi t}{2}\right),\quad t\in(0,4)$$

在邊界點 $t=0$ 與 $t=4$ 必須另外討論。

(B) 由於 $f_2(t)$ 的傳立葉級數為

$$f_2(t)=A_{20}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}cos\frac{2n\pi t}{T_2}+B_{2n}sin\frac{2n\pi t}{T_2}\right)$$

其中 $T_2=6$，且各係數為

$$A_{20}=\frac{1}{6}\left(\int_0^3 dt+\int_3^4(-1)dt\right)=\frac{1}{6}(3-1)=\frac{1}{3}$$
$$A_{2n}=\frac{2}{6}\left(\int_0^3 cos\frac{2n\pi t}{6}dt+\int_3^4(-1)cos\frac{2n\pi t}{6}dt\right)$$
$$=\frac{1}{n\pi}\left(2\sin n\pi-sin\frac{4n\pi}{3}\right)$$
$$B_{2n}=\frac{2}{6}\left(\int_0^3 sin\frac{2n\pi t}{6}dt+\int_3^4(-1)sin\frac{2n\pi t}{6}dt\right)$$
$$=\frac{1}{n\pi}\left(1+cos\frac{4n\pi}{3}-2\cos n\pi\right)$$

因此 $f_D(t)$ 可表為

$$f_D(t)=A_{20}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}cos\frac{n\pi t}{3}+B_{2n}sin\frac{n\pi t}{3}\right),\quad t\in(0,4)$$

在邊界點 $t=0$ 與 $t=4$ 必須另外討論。