SS06. 正交函數

在工程分析中，CT 週期訊號經常表為傅立葉級數(Fourier series)，其基底函數是由正弦函數與餘弦函數所構成，這些基底函數兩兩之間存在一個重要的特性，稱為正交性(orthogonality)，定義如下：

若在$t\in D=[a,b]$之範圍中，兩函數$f(t)$與$g(t)$滿足

(1) $$\int_D f(t)g(t)dt=\int_a^b f(t)g(t)dt=0$$

則稱在區間D中$f(t)$與$g(t)$為正交(orthogonal)，其中$\int_D(\bullet)dt$代表函數$(\bullet)$的積分範圍為D。

再定義基底函數如下：

若在$t\in D=[a,b]$之範圍中，有一組函數$\{b_1(t),b_2(t),...,b_n(t)\}$滿足

(2) $$\int_D b_i(t)b_j(t)dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ c, & i=j\end{cases}$$

其中$i,j\in N$，$c\neq 0$為常數，則$\{b_1(t),b_2(t),...,b_n(t)\}$可構成一組基底函數，且由(1)式可知所有的基底函數兩兩正交。

此外，若在(2)式中之$c=1$，則稱兩函數$b_i(t)$與$b_j(t)$為正交歸一(orthonormal)。

當$k=0,1,2,...$，正弦函數$sin\dfrac{2k\pi t}{T}$與餘弦函數$cos\dfrac{2k\pi t}{T}$在一個週期T的區間中，存在下列關係：

(3) $$\int_T\left(sin\frac{2n\pi t}{T}cos\frac{2m\pi t}{T}\right)dt =\frac{1}{2}\underbrace{\int_T sin\frac{2(n+m)\pi t}{T}dt}_{=0}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_T sin\frac{2(n-m)\pi t}{T}dt}_{=0}=0$$

(4) $$\int_T\left(sin\frac{2n\pi t}{T}sin\frac{2m\pi t}{T}\right)dt =\frac{1}{2}\int_T cos\frac{2(n-m)\pi t}{T}dt-\frac{1}{2}\underbrace{\int_T cos\frac{2(n+m)\pi t}{T}dt}_{=0}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ T/2, & n=m\end{cases}$$

(5) $$\int_T\left(cos\frac{2n\pi t}{T}cos\frac{2m\pi t}{T}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_T cos\frac{2(n-m)\pi t}{T}dt+\underbrace{\frac{1}{2}\int_T cos\frac{2(n+m)\pi t}{T}dt}_{=0}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ T/2 & n=m\end{cases}$$

將以上三式重新整理如下：

(6) $$\int_T\left(sin\frac{2n\pi t}{T}cos\frac{2m\pi t}{T}\right)dt=0$$

(7) $$\frac{2}{T}\int_T\left(sin\frac{2n\pi t}{T}sin\frac{2m\pi t}{T}\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

(8) $$\frac{2}{T}\int_T\left(cos\frac{2n\pi t}{T}cos\frac{2m\pi t}{T}\right)dt=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

根據(2)之條件，由(3)~(5)三式可知

$$\left\{sin\frac{2n\pi t}{T},\ cos\frac{2n\pi t}{T}\right\}_{n=0,1,2,\ldots},\ \left\{sin\frac{2n\pi t}{T}\right\}_{n=1,2,\ldots},\ \left\{cos\frac{2n\pi t}{T}\right\}_{n=0,1,2,\ldots}$$

皆可構成一組基底函數。例如一般的週期函數 $f(t)$ 可表為基底函數的組合，如下所示：

(9) $$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n cos\frac{2n\pi t}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi t}{T}\\&=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos\frac{2n\pi t}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi t}{T}\end{aligned}$$

此式即傅立葉級數(Fourier series)。

若 $f(t)$ 為週期性的偶函數，餘弦函數為基底，$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n cos\frac{2n\pi t}{T}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos\frac{2n\pi t}{T}$ 稱為傅立葉餘弦級數(Fourier cosine series)。

若 $f(t)$ 為週期性的奇函數，弦函數為基底，$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi t}{T}$

稱為傅立葉正弦級數(Fourier sine series)。

例題： 若週期訊號 $f(t)$ 可表為以 $\left\{ sin\frac{2n\pi t}{T}, n\in N \right\}$ 為基底之函數，

如下所示：

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi t}{T}, \qquad t\in(-\infty,\infty)$$

試證

(A) $f(t)$ 為奇函數，即 $f(-t)=-f(t)$

(B) $f(t)$ 之週期為 T，即 $f(t)=f(t+T)$

(C) $B_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\,sin\frac{2n\pi t}{T}dt$

解： (A) $f(-t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi(-t)}{T}=-\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi t}{T}=-f(t)$

(B)
$$f(t+T)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi(t+T)}{T}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\, sin\left(\frac{2n\pi t}{T}+2n\pi\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}B_n sin\frac{2n\pi t}{T}=f(t)$$

(C) 計算下列之積分式：

$$\frac{2}{T}\int_T f(t)\,sin\frac{2n\pi t}{T}dt=\frac{2}{T}\int_T\left(\sum_{k=1}^{\infty}B_k sin\frac{2k\pi t}{T}\right)sin\frac{2n\pi t}{T}dt$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\left(\frac{2}{T}\int_T sin\frac{2k\pi t}{T}\,sin\frac{2n\pi t}{T}dt\right)$$

由(7)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k\left(\frac{2}{T}\int_T sin\frac{2k\pi t}{T}\,sin\frac{2n\pi t}{T}dt\right)=B_n$$

故 $B_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\,sin\frac{2n\pi t}{T}dt$ 成立。