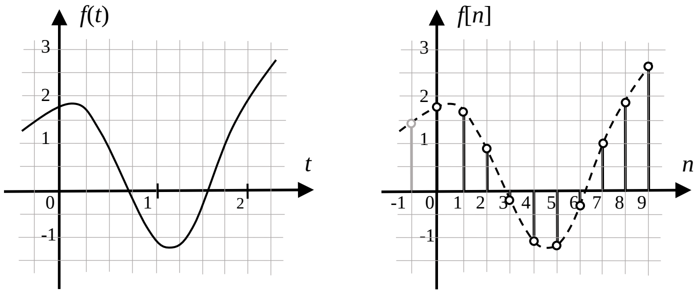
SS05. 週期訊號

在工程應用上所處理的訊號通常都是隨時間 t 變化的，可概分為兩類，即

(A) 連續時間訊號(continuous-time signal，簡稱 CT 訊號)
(B) 離散時間訊號(discrete-time signal，簡稱 DT 訊號)

如圖 1 中所示。



(a) 連續時間訊號　(b) 離散時間訊號, T_s=0.25

圖 1

在圖 1(a)中，$f(t)$ 是以連續時間 t 為變數，基本單位為秒(sec)，屬於 CT 訊號；在圖 1(b)中，$f[n]$ 是對 $f(t)$ 每隔 $T_s = 0.25\,sec$ 取樣一次所得到的 DT 訊號，稱 T_s 為取樣時間(sampling time)，$f[n]$ 是以 $n \in Z$ 為離散變數，如下所示：(1)

$$f[n]=f(nT_s)$$

例如 $f[4]=f(4\times 0.25)=f(1)$。

在工程分析中，每隔固定時間重複出現的訊號稱為週期訊號(periodic function)，首先考慮 CT 週期訊號，例如：

(2) $$p(t\pm T)=p(t),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

此式代表訊號 $p(t)$ 每隔 T>0 重複出現一次，稱 T 為週期(period)，其倒數 $f=\dfrac{1}{T}$ 稱為頻率(frequency)，單位為 Hz 或 1/sec，例如：正弦訊號 $sin(t)$ 滿足

(3) $$sin(t\pm 2k\pi)\big|_{k\in N}=sin(t),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

由於每隔 $T=2k\pi\big|_{k\in N}$ 出現一次，因此是一個週期訊號，週期為 $T=2k\pi$，當 k=1 時為最小週期 $T=2\pi$，在一般情況下，若沒有特別聲明，所稱的週期就是最小週期，例如在圖 2 中 $p(t)$ 的週期為 T_0。

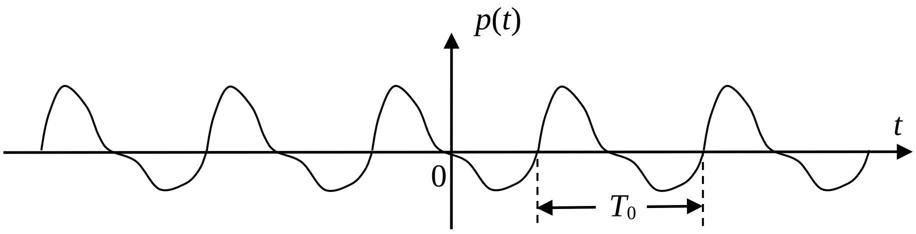


圖 2

試問：若有一個訊號是由兩個不同的週期訊號所合成，則此訊號是否仍為週期訊號？針對此問題說明如下：

令週期訊號 $p_1(t)$ 與 $p_2(t)$ 分別具有週期 T_1 與 T_2，則可表為

(4) $$p_1(t)=p_1(t+mT_1),\quad m\in N$$

(5) $$p_2(t)=p_2(t+nT_2),\quad n\in N$$

今假設兩訊號合成為 $p(t)=p_1(t)+p_2(t)$ 且具有週期 T，因此

(6) $$p(t+T)=p(t)$$

或表為

(7) $$p_1(t+T)+p_2(t+T)=p_1(t)+p_2(t)$$

將(4)與(5)兩式代入(7)式可得

(8) $$p_1(t+T)+p_2(t+T)=p_1(t+mT_1)+p_2(t+nT_2)$$

觀察此式可知週期 T 滿足下式：

(9) $$T=mT_1=nT_2$$

故

(10) $$\frac{T_1}{T_2}=\frac{n}{m}\in Q$$

其中 $\frac{n}{m}$ 為有理數，也就是說當兩週期訊號 $p_1(t)$ 與 $p_2(t)$ 之週期比值為有理數時，則合成訊號 $p(t)$ 亦為週期訊號，此外，由(9)式可知當 $(m,n)=1$ 時，$T=mT_1=nT_2$ 為最小週期。

在處理工程問題時，最常見的週期訊號為正弦訊號 $sin\frac{2\pi t}{T_1}$ 與餘弦訊號 $cos\frac{2\pi t}{T_2}$，其中 $sin\frac{2\pi t}{T_1}$ 為奇函數，$cos\frac{2\pi t}{T_2}$ 為偶函數，且兩者的週期分別為 T_1 與 T_2，此外也常將兩訊號表為

(11) $$sin\frac{2\pi t}{T_1} = sin\,2\pi f_1 t = sin\,\omega_1 t$$

(12) $$cos\frac{2\pi t}{T_2} = cos\,2\pi f_2 t = cos\,\omega_2 t$$

其中頻率除了以 $f_k = \left.\frac{1}{T_k}\right|_{k=1,2}$ 來表示外，有時也表為 $\omega_k = \left.\frac{2\pi}{T_k}\right|_{k=1,2}$，對於單頻的三角波訊號而言，由於 ω_k 與旋轉角度有關，所以特稱 ω_k 為角頻率(angular frequency)，單位為 rad/sec。

例題： 試求 $p(t) = sin\frac{t}{2} - cos\frac{t}{3}$ 之週期與頻率各為何？

解： 由於 $sin\frac{t}{2} = sin\frac{2\pi t}{T_1}$ 與 $cos\frac{t}{3} = cos\frac{2\pi t}{T_2}$，其中 $T_1 = 4\pi$，$T_2 = 6\pi$ 分別為兩者之週期，且 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} = \frac{2}{3}$ 為有理數，因此 $p(t)$ 是一個週期訊號，
在滿足 $(m,n)=1$ 之條件下取 $m=3$ 與 $n=2$，故週期為 $T = mT_1 = 12\pi$，
頻率為 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12\pi}$，角頻率為 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{6}$。

例題： 試求 $g(t) = sin\,\pi t + cos\,2t$ 之週期

解： 由於 $sin\,\pi t = sin\frac{2\pi t}{T_1}$ 與 $cos\,2t = cos\frac{2\pi t}{T_2}$，兩者之週期分別為 $T_1 = 2$，$T_2 = \pi$，因為 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\pi}$ 不是有理數，所以 $g(t)$ 不是一個週期訊號。

例題： 已知 $g(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$，$a \in R$，$-\infty < t < \infty$，

試問在什麼條件下，$g(t)$ 為具有週期 T 的週期訊號？

解： 假設 $g(t)=g(t+T)$，具有週期 T，由於

$$g(t+T)=\int_a^{t+T} f(\tau)d\tau=\int_a^t f(\tau)d\tau+\int_t^{t+T} f(\tau)d\tau$$
$$=g(t)+\int_t^{t+T} f(\tau)d\tau$$

因此只有在 $\int_t^{t+T} f(\tau)d\tau=0$ 之條件下，$g(t)=g(t+T)$ 才成立。

對任意 $t\in R$ 而言，$\int_t^{t+T} f(\tau)d\tau=0$ 可改寫為 $\int_T f(\tau)d\tau=0$，

亦即 $f(t)$ 也必須具有週期 T，亦即 $f(t)=f(t+T)$。

接著考慮 DT 週期訊號，例如：

(13) $\quad p[k\pm K]=p[k],\quad k\in Z,\quad K\in N$

此式代表 $p[k]$ 為週期訊號，因為 $p[k]$ 每隔 $K\in N$ 重複出現一次，K 即為週期。

試問：若 $p[k]=sin(kT_s)$，則取樣時間 T_s 必須滿足什麼條件，$p[k]$ 才會是以 K 為週期的週期訊號？

根據(13)式可知 $p[k+K]=p[k]$，亦即

(14) $\quad sin\left[(k+K)T_s\right]=sin\left[kT_s\right]$

由於正弦訊號的週期為 $2n\pi\big|_{n\in N}$，因此 $2n\pi=KT_s$，亦即取樣時間必須滿足

(15) $\quad T_s=\dfrac{n}{K}2\pi=2q\pi$

其中 $q=\dfrac{n}{K}\in Q_+$ 為正有理數。