SS04. 自然指數函數

指數函數(exponential function)經常存在於自然現象之中，例如放射性元素的質量 $m(t)$就是依據時間 t 的指數函數來衰減，每當質量減半時，所經歷的時間就是半衰期，其數學式為

(1) $$m(t)=2^{-\frac{t-t_0}{T}}m(t_0)$$

其中$2^{-\frac{t-t_0}{T}}$是以 2 為基底的指數函數，$m(t_0)$是 $t=t_0$時的質量，T 為半衰期，當時間經過一個半衰期 T，即 $t=t_0+T$ 時，其質量為

(2) $$m(t_0+T)=\frac{1}{2}m(t_0)$$

亦即衰減為 $m(t_0)$的一半。

指數函數通常包括倍率，基底與指數項，數學式如下：

(3) $$y(x)=k\cdot a^{bx}$$

其中倍率為常數 k，基底為 a>0，指數項為 bx，其係數 b 為常數。

若考慮 a>1 且 k>0 之情況，則當 b>0 時，a^{bx}會隨著變數 x 的增加而遞增，反之，當 b<0 時，a^{bx}會隨著變數 x 的增加而遞減，而當 b=0 時，a^{bx}=1 為定值，如圖 1 所示。

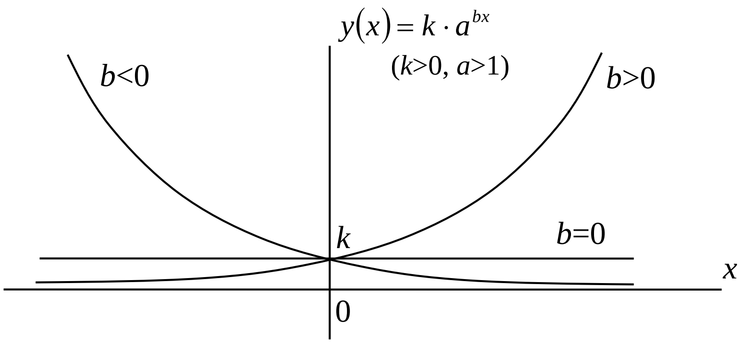

圖 1

指數函數 $y(x)$可以變換不同的基底，例如將基底改為 $c\neq a$ 且 c>0，亦即

(4) $$a^{bx}=c^{dx}$$

此式取對數後可得

(5) $$bx\cdot log_c a=dx$$

亦即 $d = b \cdot log_c a$ ，故

(6) $$y(x) = k \cdot a^{bx} = k \cdot c^{dx} = k \cdot c^{(b \cdot log_c a)x}$$

指數函數中最特殊且最常用的是自然指數函數 e^x ，基底為 $e>0$，定義如下：

(7) $$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$$

由於

(8) $$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} C_n^N \left(\frac{x}{N}\right)^n$$

$$= 1 + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}\frac{x^n}{N^n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

故

(9) $$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

令 x=1，即可求得 e 的數值大小為

(10) $$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2.718\cdots$$

在數學上稱 e 為自然基底；若是令 x=−1，則可得

(11) $$e^{-1} = 1 + (-1) + \frac{1}{2!} + \frac{(-1)}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 0.3679$$

此數值是工程分析中經常使用的常數，與時間常數(time constant)有關。

在工程應用中，系統的本質通常都是以 e^x 來描述，這是因為 e^x 有一個相當重要的性質，如下所示：

(12) $$\frac{de^x}{dx} = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

也就是說，e^x 的微分等於它自身，此外

(13) $$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$$

也就是說，e^{ax}的微分等於它自身的 a 倍，事實上此特性可用來處理一般指數函數a^x的微分，通常先將a^x化為$a^x = e^{(\ln a)x}$，再利用(13)式求得

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{(\ln a)x} = (\ln a)\cdot e^{(\ln a)x} = (\ln a)\cdot a^x \tag{14}$$

顯然地，a^x的微分確實比e^x複雜許多，因此在工程上通常都採用自然指數函數來處理問題。

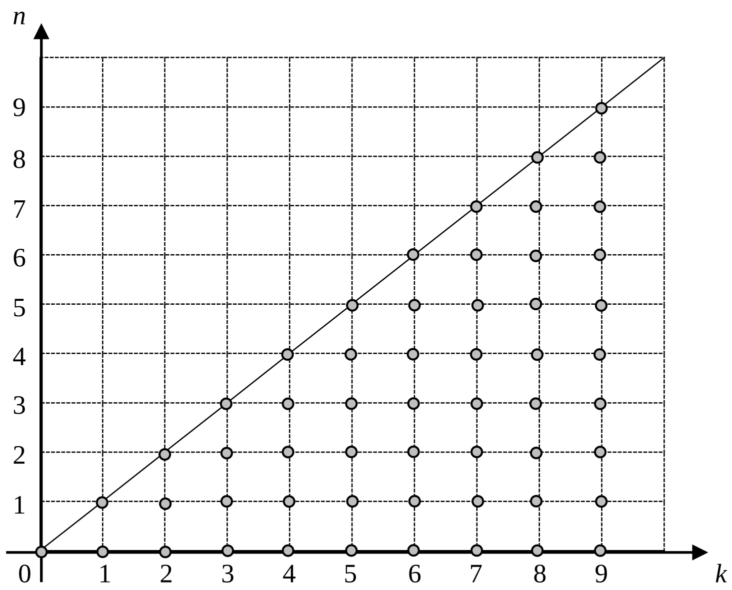

圖 2

兩個基底相同的指數函數相乘時，其乘積只需將指數項相加即可，因此自然指數函數必須滿足$e^x e^y = e^{x+y}$，此特性可用直接計算之方式來檢驗，如下所示：

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{y^{k-n}}{(k-n)!}\bigg|_{k=m+n} \tag{15}$$

由於

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{y^{k-n}}{(k-n)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}\frac{y^{k-n}}{(k-n)!} \tag{16}$$

其中等號左邊是先決定 n，再取$k \ge n$，而等號右邊則是先決定 k，再取$n \le k$，兩種方式所得到的結果相同，如圖 2 所示之灰點，因此

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}\frac{y^{k-n}}{(k-n)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{n!(k-n)!}\frac{x^n y^{k-n}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}C_n^k x^n y^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+y)^k = e^{x+y} \end{aligned} \tag{17}$$

此結果確實符合指數的運算法則。

例題： 求$\dfrac{d}{dx}b^{ax}$，其中 $b>0$。

解： 由於$b^{ax}=e^{(a\cdot \ln b)x}$，因此可得

$$\frac{d}{dx}b^{ax}=\frac{d}{dx}e^{(a\cdot \ln b)x}=a\cdot \ln b\left(e^{(a\ln b)x}\right)=a\cdot \ln b\left(b^{ax}\right)$$