SS03. 泰勒公式

在工程分析中，當面對非線性函數時，最常被用來處理線性化的數學工具就是泰勒公式(Taylor's Formula)，敘述如下：

當 $x\in(a,b)$ ，若 $f(x)$ 為連續且(n+1)次可微，亦即存在 $\left.\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{k=0,1,2,\ldots,(n+1)}$ ，則泰勒公式如下所示：

(1) $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 $f^{(k)}(x)\equiv\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}$ ， $a<x_0<\xi<x<b$ 。

<u>證明如下：</u>

首先定義泰勒多項式(Taylor's polynomial)，如下所示：

(2) $$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

此式經 k 次微分後可得

(3) $$P^{(k)}(x_0)=\begin{cases} f^{(k)}(x_0) & k=0,1,2,\cdots,n \\ 0 & k=n+1 \end{cases}$$

再令

(4) $$S(x)=(x-x_0)^{n+1}$$

(5) $$R(x)=f(x)-P(x)$$

其中 $R(x)$稱為餘式(remainder)，由以上三式可知

(6) $$\left.S^{(k)}(x_0)\right|_{k=0,1,\ldots,n}=0$$

(7) $$S^{(n+1)}(x)=(n+1)!$$

(8) $$\left.R^{(k)}(x_0)\right|_{k=0,1,\ldots,n}=f^{(k)}(x_0)-P^{(k)}(x_0)=0$$

(9) $$R^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$$

顯然地， $R(x_0)=S(x_0)=0$ ，利用廣義平均值定理可得

(10) $$\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{R(x)-R(x_0)}{S(x)-S(x_0)}=\frac{R'(\delta_1)}{S'(\delta_1)},\qquad x_0<\delta_1<x$$

同樣地，$R'(x_0)=S'(x_0)=0$，再利用廣義平均值定理與(10)式可推得

(11) $$\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{R'(\delta_1)}{S'(\delta_1)}=\frac{R'(\delta_1)-R'(x_0)}{S'(\delta_1)-S'(x_0)}=\frac{R''(\delta_2)}{S''(\delta_2)},\quad x_0<\delta_2<\delta_1<x$$

依此類推，當 $k=1,2,\cdots,n$ 時可得

(12) $$\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{R^{(k)}(\delta_k)}{S^{(k)}(\delta_k)}=\frac{R^{(k)}(\delta_k)-R^{(k)}(x_0)}{S^{(k)}(\delta_k)-S^{(k)}(x_0)}=\frac{R^{(k+1)}(\delta_{k+1})}{S^{(k+1)}(\delta_{k+1})},\quad x_0<\delta_{k+1}<\delta_k<x$$

亦即

(13) $$\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{R^{(k+1)}(\delta_{k+1})}{S^{(k+1)}(\delta_{k+1})},\quad x_0<\delta_{k+1}<\delta_k<x,\ k=1,2,...,n$$

由此式可知當 k=n 時，令 $\delta_{n+1}=\xi$，則可得

(14) $$\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{R^{(n+1)}(\delta_{n+1})}{S^{(n+1)}(\delta_{n+1})}=\frac{R^{(n+1)}(\xi)}{S^{(n+1)}(\xi)},\quad x_0<\xi<\delta_n<x$$

再將(4)、(7)與(9)三式代入(14)式可得

(15) $$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad x_0<\xi<x$$

最後再根據(2)、(5)與(15)三式可得

(16) $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad x_0<\xi<x$$

如(1)式所示，故得證。

在面對工程問題時經常為了簡化處理而刻意設定 x_0=0，在此情況下，可將泰勒公式改寫為

(17) $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad 0<\xi<x$$

此式稱為馬克羅林公式(Maclaurin’s formula)。

若連續函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處可解析(analytic)，即存在 $f^{(n)}(x_0)\big|_{n=0,1,2,...,\infty}$，在此情況

下， $f(x)$可以表為無窮級數之形式，如下所示：

(18) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

此式稱為 $f(x)$的泰勒級數(Taylor' series)。

在工程分析中經常採用泰勒多項式 $P(x)$來近似 $f(x)$，即 $f(x)\approx P(x)$，所需的條件是存在定值 M，使得

(19) $$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\le M,\quad x_0<\xi<x$$

再利用餘式 $R(x)$的絕對值來估測 $f(x)$與 $P(x)$兩者的差異，即

(20) $$|R(x)|=|f(x)-P(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

經整理後成為

(21) $$|R(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

由此式可獲得結論如下：當$|x-x_0|<1$且 x 越趨近於 x_0，則$|R(x)|$越小，泰勒多項式 $P(x)$越能準確地估算 $f(x)$。

例題： 求 $f(x)=\sin x$ 與 $g(x)=\cos x$ 在 x=0 處之泰勒級數。

解： 首先將 $f(x)$逐次微分，其結果為

$$f(x)=\sin x，\ f'(x)=\cos x，\ f''(x)=-\sin x，$$
$$f'''(x)=-\cos x，\ f^{(4)}(x)=\sin x，\cdots\ \cdots\cdots$$

在 x=0 處可得 $f(0)=0$， $f'(0)=1$， $f''(0)=0$， $f'''(0)=-1$，⋯ ⋯

亦即 $f^{(2n)}(0)=0$， $f^{(4n+1)}(0)=1$， $f^{(4n+3)}(0)=-1$

故 $f(x)=\sin x$ 的泰勒級數為

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\cdots\cdots$$

顯然地， $f(x)=\sin x$ 一個奇函數。

依據同樣的方式對 $g(x)$逐次微分，其結果為

$$g(x)=\cos x，\ g'(x)=-\sin x，\ g''(x)=-\cos x，$$

$g'''(x)=\sin x$ ，$g^{(4)}(x)=\cos x$，⋯ ⋯⋯

在 x=0 處可得 $g(0)=1$，$g'(0)=0$ ，$g''(0)=-1$，$g'''(0)=0$ ，⋯⋯

亦即 $g^{(2n+1)}(0)=0$ ，$g^{(4n)}(0)=1$ ，$g^{(4n+2)}(0)=-1$

故 $g(x)=\cos x$ 的泰勒級數為

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\cdots\cdots$$

顯然地，$g(x)=\cos x$ 是一個偶函數。

例題： 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 x=0.5 處之泰勒級數。

解： 因為 $f(x)$在 x=0.5 處為連續且可解析，因此存在泰勒級數，

首先將 $f(x)$逐次微分，其結果為

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1},\quad f'(x)=(1-x)^{-2},\quad f''(x)=2(1-x)^{-3}$$

依此類推可得 n 次微分式為 $f^{(n)}(x)=(n!)(1-x)^{-(n+1)}$ ，故

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=(1-x)^{-(n+1)}=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

當 x=0.5 時可得 $\dfrac{f^{(n)}(0.5)}{n!}=2^{n+1}$ ，其泰勒級數為

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(x-0.5)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot\left(2(x-0.5)\right)^n$$

此式只有在 $|2(x-0.5)|<1$ 時才會收斂，亦即 $0<x<1$ 。