SS02. 平均值定理與洛斯比托法則

平均值定理是一項重要的數學觀念，敘述如下：

若 $x\in[a,b]$ 且 $f(x)$為連續可微，則存在 $a<\xi<b$，使得

(1) $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

此結果可直接觀察圖 1(a)而得。

此外，當 $f(a)=f(b)$時可知 $f'(\xi)=0$ ，如圖 1(b)所示，在此情況下的平均值定理，稱為羅勒定理(Rolle's theorem)。

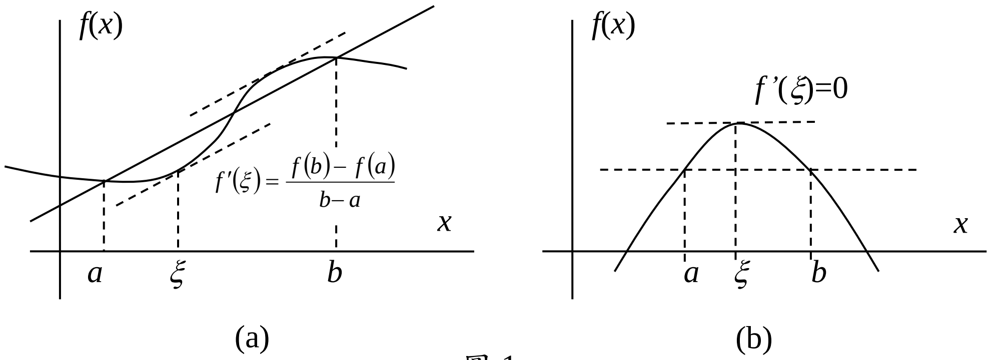

圖 1

上述定理可推廣為廣義平均值定理(generalized mean value theorem)，敘述如下：

當 $x\in[a,b]$ 且 $f(x)$與 $g(x)$皆為連續可微，若 $g(a)\neq g(b)$，則可得

(2) $$\left.\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|_{a<\xi<b}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

為了證明此推廣定理，先定義

(3) $$\phi(x)=(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))-(g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$$

其微分為

(4) $$\phi'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-g(a))f'(x)$$

根據以上兩式可知 $\phi(a)=\phi(b)=0$ ，再利用羅勒定理可得

(5) $$\phi'(\xi)=(f(b)-f(a))g'(\xi)-(g(b)-g(a))f'(\xi)=0$$

此式經整理後成為 $\left.\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|_{a<\xi<b}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，與(2)式相同，故廣義平均值定理成立。

> 例題： 若 $f(x)=\frac{1}{x}$，則當
>
> (A) $a=1$，$b=2$
>
> (B) $a=-1$，$b=1$
>
> 是否存在 $a<\xi<b$ 滿足平均值定理 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$？

解： (A) $a=1$，$b=2$

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Rightarrow -\frac{1}{\xi^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \xi=\sqrt{2}=1.414$$

因為在 $1<x<2$ 範圍內，$f(x)=\frac{1}{x}$ 為連續可微，所以存在 $1<\xi<2$。

(B) $a=-1$，$b=1$

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} \Rightarrow -\frac{1}{\xi^2}=1$$

顯然地，ξ無解，這是因為在$-1<x<1$ 範圍內，

當 $x=0$ 時，$f(x)=\frac{1}{x}$ 不連續且不可微，所以ξ不存在。

接著利用廣義平均值定理來推導洛斯比托法則(l'Hospital's Rule)，令 $f(x)$與 $g(x)$ 在 $x=0$ 處為可微，且 $f(0)=g(0)=0$，則根據(2)式可得

(6) $$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad 0<\xi<x$$

(7) $$\frac{f(0)-f(x)}{g(0)-g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x<\xi<0$$

顯然地，當 $x\to 0$ 時可知

(8) $$\lim_{\xi\to 0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

故由以上三式可得洛斯比托法則如下：

(9) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

此式法則適用於 $f(0)=g(0)=0$ 之函數。

例題： 給定 $h(\mathrm{x})=\dfrac{\sin x}{x}$ ，求 $h(0)$ 。

解： 令 $h(\mathrm{x})=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ，其中 $f(x)=\sin x$ 與 $g(x)=x$ ，

滿足 $f(0)=g(0)=0$ ，故可利用(9)式求算 $h(0)$如下：

$$h(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left.\frac{\cos x}{1}\right|_{x=0}=1$$