SS01. 微積分基本定理

在微積分領域中，有兩個重要的基本定理，用來描述實數函數 $f(x)\in R$ 的微分與積分，如下所示：

[P1] 微積分第一基本定理：

令 $f(x)\in R$ 為連續函數且 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ ，$x\in[a,b]$，則在開放區間 $x\in(a,b)$ 中，$g'(x)=f(x)$。

[P2] 微積分第二基本定理：

令 $f(x)\in R$ 且 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，則 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$。

<u>針對[P1]說明如下：</u>

由於 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 的積分下限為定值 a，上限為變數 x，因此 $\int_a^x f(t)dt$ 會隨著 x 變動，在開放區間 $x\in(a,b)$ 中，$g(x)$ 之微分運算如下：

(1)
$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$

應注意的是 $g(x)$ 在 x 處可微，所以必須連續，因此將 $g'(x)$ 的適用範圍限定在開放區間 $x\in(a,b)$，避開可能產生不連續狀況的端點 $x=a$ 與 $x=b$。

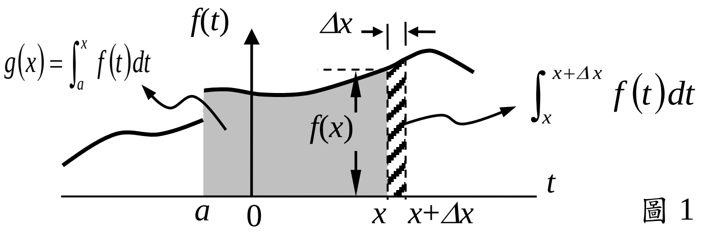

圖 1

若以圖 1 為例，$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ 等於圖中的斜線面積，當 $\Delta x\to 0$ 時，因為 $f(x+\Delta x)\to f(x)$，所以 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\approx f(x)\Delta x$，也就是說，斜線區域可視為長寬各為 $f(x)$ 與 Δx 之矩形，面積趨近於 $f(x)\Delta x$，即(1)式可改寫為

(2) $$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}f(t)dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}f(x)\Delta x=f(x)$$

或者是

(3) $$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(x)$$

故[P1]成立。

在學習微積分時都有一個口訣:「將函數 $f(x)$積分後再微分，其結果仍為 $f(x)$」，事實上這種敘述過於簡化，應該是「當函數 $f(x)$的積分上限為變數 x，下限為常數時，將 $f(x)$積分後再微分後之結果仍為 $f(x)$」。

在數學上稱 $\int_{a}^{x}f(t)dt$ 之積分型式為”跑動式積分”(running integral)。

除了單變數的積分型式 $\int_{a}^{x}f(t)dt$ 外，有時也會面對双變數的 $g(x)=\int_{a}^{x}f(x,t)dt$，同樣利用微分定義來求算，可得

(4) $$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(g(x+\Delta x,t)-g(x,t)\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{a}^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt-\int_{a}^{x}f(x,t)dt\right)\end{aligned}$$

其中

(5) $$\int_{a}^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt=\int_{a}^{x}f(x+\Delta x,t)dt+\int_{x}^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt$$

因此(4)式可改寫為

(6) $$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{a}^{x}f(x+\Delta x,t)dt-\int_{a}^{x}f(x,t)dt\right)\\&\quad+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt\\&=\int_{a}^{x}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x,t)-f(x,t)\right)\right)dt\\&\quad+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt\end{aligned}$$

其中

(7) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x,t)-f(x,t)\right)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$$

(8) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}f(x+\Delta x,x)\Delta x=f(x,x)$$

故

(9) $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)dt = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + f(x,x)$$

在系統工程中經常會處理到單變數(3)式與双變數(9)式的的微分運算。

針對[P2]說明如下：

已知 $F'(x)=f(x)$， $f(x)\in R$， $x\in[a,b]$，定義下列兩個函數：

(10) $$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

(11) $$h(x)=G(x)-F(x)+F(a)$$

故

(12) $$G'(x)=f(x)$$

(13) $$h(a)=G(a)-F(a)+F(a)=0$$

若 $h(x)$對 x 微分，則可得

(14) $$h'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

根據 $h(a)=0$ 與 $h'(x)=0$ 可知當 $x\in[a,b]$時，$h(x)=0$，故(11)式可化為

(15) $$G(x)-F(x)+F(a)=\int_a^x f(t)dt-F(x)+F(a)=0$$

令 $x=b$ ，可得 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$，故[P2]成立。

例題： 給定 $f(x)=x^2+sin\,\pi x$， $0\le x<\infty$ ，計算下列各式：

(A) $h_1(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt$ (B) $h_2(x)=\frac{d}{dx}\int_0^2 f(t)dt$

(C) $h_3(x)=\frac{d}{dx}\int_0^2 x^2 f(t)dt$ (D) $h_4(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x x^2 f(t)dt$

解： (A) 根據(3)式可得

$$h_1(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)=x^2+sin\,\pi x$$

(B) 由於 $\int_0^2 f(t)dt=\left.\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{\pi}cos\,\pi t\right|_{t=0}^{2}=\frac{8}{3}$ 為定值，故

$$h_2(x)=\frac{d}{dx}\int_0^2 f(t)dt=0$$

(C) 計算$\int_0^2 x^2\ f(t)dt = x^2\int_0^2 f(t)dt = \frac{8}{3}x^2$，故

$$h_3(x) = \frac{d}{dx}\int_0^2 x^2\ f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{8}{3}x^2\right) = \frac{16}{3}x$$

(D) 計算$\int_0^x x^2\ f(t)dt = x^2\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{3}x^5 + \frac{x^2}{\pi}(1-\cos\pi x)$，故

$$h_4(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x x^2\ f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^5 + \frac{x^2}{\pi}(1-\cos\pi x)\right)$$
$$= \frac{5}{3}x^4 + x^2\sin\pi x + \frac{2x}{\pi}(1-\cos\pi x)$$

也可利用(9)式求算如下：

$$h_4(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x x^2\ f(t)dt = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\ f(t)\right)dt + x^2 f(x)$$
$$= \int_0^x 2x\ f(t)dt + x^2 f(x)$$
$$= \frac{2x^4}{3} + \frac{2x}{\pi}(1-\cos\pi x) + x^4 + x^2\sin\pi x$$
$$= \frac{5}{3}x^4 + x^2\sin\pi x + \frac{2x}{\pi}(1-\cos\pi x)$$

得到相同的結果。