

Chapter 2 An Introduction to Matrix Analysis

什麼是秩？從直觀談起

Cheng-Fang Su

(National Yang Ming Chiao Tung University)

Jun 9, 2025

基本觀念

- 在正式進入矩陣秩的數學定義前，我們先從直觀的例子來理解「秩 (rank)」的含義，並聚焦在最基礎也最重要的情形：**Rank = 1**，也就是「秩為 1 的矩陣」所代表的意義。

基本觀念

- 在正式進入矩陣秩的數學定義前，我們先從直觀的例子來理解「秩 (rank)」的含義，並聚焦在最基礎也最重要的情形：**Rank = 1**，也就是「秩為 1 的矩陣」所代表的意義。
- 矩陣的「秩」(rank) 可以理解為：這個矩陣中到底包含了多少個彼此真正獨立、不重複的「方向」。

基本觀念

- 在正式進入矩陣秩的數學定義前，我們先從直觀的例子來理解「秩 (rank)」的含義，並聚焦在最基礎也最重要的情形：**Rank = 1**，也就是「秩為 1 的矩陣」所代表的意義。
- 矩陣的「秩」(rank) 可以理解為：這個矩陣中到底包含了多少個彼此真正獨立、不重複的「方向」。
- 換句話說，若矩陣的所有行（或列）都只是某一個固定向量的倍數，那整體其實只沿著同一個方向在變動，這就是秩為 1 的情形。

矩陣秩的例題

Example

請觀察下列兩個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

矩陣秩的例題

Example

請觀察下列兩個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 在矩陣 A 中，第二行是第一行的兩倍，第三行是第一行的三倍，也就是說所有行都只是第一行的倍數，沒有新增的「方向」。這樣的矩陣秩為 1，因為資料只集中在一個方向上。

矩陣秩的例題

Example

請觀察下列兩個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 在矩陣 A 中，第二行是第一行的兩倍，第三行是第一行的三倍，也就是說所有行都只是第一行的倍數，沒有新增的「方向」。這樣的矩陣秩為 1，因為資料只集中在一個方向上。
- 但在矩陣 B 中，三行之間彼此無法用倍數關係表達，因此它們提供了多個獨立的方向，也就是說， B 的秩大於 1。 □

矩陣秩的數學定義

- 我們不只可以從行的角度來看秩，也可以從列的角度來討論。把 3×3 矩陣 A 想像成三張影像（每列是一張 3×1 的灰階影像），它們的圖樣完全相同，只是亮度不同。這表示：這組資料其實只有「一種變化方向」。

矩陣秩的數學定義

- 我們不只可以從行的角度來看秩，也可以從列的角度來討論。把 3×3 矩陣 A 想像成三張影像（每列是一張 3×1 的灰階影像），它們的圖樣完全相同，只是亮度不同。這表示：這組資料其實只有「一種變化方向」。

Rank 1 的幾何意義

若所有行（或列）都是某個固定向量的倍數，則這些資料實際上只落在這個向量的方向上。

以列向量的方式來觀察秩的意義

- 請觀察下列矩陣：

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix},$$

這三列分別是 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的倍數 (2 倍、4 倍、-2 倍)，表示它們其實都在同一個方向上。

- 這表示：這個矩陣只有一種方向變化，因此 **Rank = 1**。

以列向量的方式來觀察秩的意義

- 請觀察下列矩陣：

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix},$$

這三列分別是 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的倍數 (2 倍、4 倍、-2 倍)，表示它們其實都在同一個方向上。

- 這表示：這個矩陣只有一種方向變化，因此 **Rank = 1**。



Figure 1: 三列為比例關係，轉為灰階影像圖樣完全一致 (Rank = 1)

以行向量的方式來觀察秩的意義

- 同樣考慮矩陣 M :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix},$$

以行向量的方式來觀察秩的意義

- 同樣考慮矩陣 M ：

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix},$$

我們也可以從行向量的角度來看，請參考圖 2：

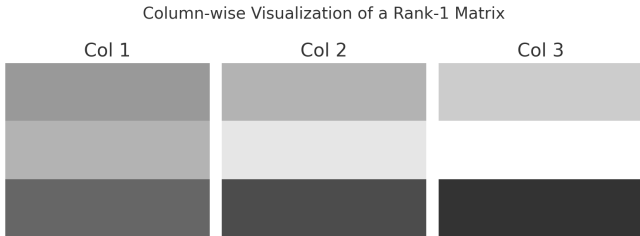


Figure 2: 以行向量觀察 Rank = 1 的矩陣，每一行皆為同方向的比例變化

矩陣秩的例題

Example

請判斷矩陣 N 的秩是否為 1，並說明理由。

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}.$$

向量的外積 (Outer Product)

- 向量的外積 (Outer Product) 是一種建立 **Rank = 1** 矩陣的方法。
- 我們可以透過計算或程式來建立 **Rank = 1** 的矩陣。例如，取兩個向量，分別當作「行」與「列」方向，將它們相乘（做 outer product）所形成的矩陣，自然就是 **Rank = 1**，這是因為「整個矩陣都是由同一組向量的組合所張成的」。

向量的外積 (Outer Product)

- 向量的外積 (Outer Product) 是一種建立 **Rank = 1** 矩陣的方法。
- 我們可以透過計算或程式來建立 **Rank = 1** 的矩陣。例如，取兩個向量，分別當作「行」與「列」方向，將它們相乘（做 outer product）所形成的矩陣，自然就是 **Rank = 1**，這是因為「整個矩陣都是由同一組向量的組合所張成的」。
- Outer product 不是矩陣乘法中的點積 (dot product)，也不是叉積 (cross product)，而是行乘列 (column-by-row) 產生一個完整的矩陣。如果我們寫程式視覺化這個結果會發現每一列的圖樣都一致，只是亮度不同。

向量的外積運算例

設行向量 $\vec{u}$ 及列向量 $\vec{v}$ 分別如下：

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = [4 \quad 5 \quad 6].$$

令 $A = \vec{u} \cdot \vec{v}$ ，也就是做 outer product：

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [4 \quad 5 \quad 6] = \begin{bmatrix} 1 \cdot [4 \quad 5 \quad 6] \\ 2 \cdot [4 \quad 5 \quad 6] \\ 3 \cdot [4 \quad 5 \quad 6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

向量的外積運算例

設行向量 $\vec{u}$ 及列向量 $\vec{v}$ 分別如下：

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = [4 \quad 5 \quad 6].$$

令 $A = \vec{u} \cdot \vec{v}$ ，也就是做 outer product：

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [4 \quad 5 \quad 6] = \begin{bmatrix} 1 \cdot [4 \quad 5 \quad 6] \\ 2 \cdot [4 \quad 5 \quad 6] \\ 3 \cdot [4 \quad 5 \quad 6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

這個矩陣的每一列都是 $[4 \quad 5 \quad 6]$ 的倍數，代表它只有「一個方向」，所以

$$\text{rank}(A) = 1.$$

這就是由兩個向量用外積生成的 **Rank = 1** 矩陣。

向量的外積運算例之視覺化

- 注意到 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 負責的是控制亮度， $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 負責的是圖樣本身，
然後使用外積就是在把 $\vec{v}$ 的每一列改變亮度。
- 由於每一列都是 $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 的倍數，這些灰階影像只是亮度比例不同，
但圖樣完全一致。這正是 **Rank = 1** 的幾何視覺意義：只有一種方向變化。

向量的外積運算例之視覺化

- 注意到 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 負責的是控制亮度， $\vec{v} = [4 \ 5 \ 6]$ 負責的是圖樣本身，
然後使用外積就是在把 $\vec{v}$ 的每一列改變亮度。
- 由於每一列都是 $[4 \ 5 \ 6]$ 的倍數，這些灰階影像只是亮度比例不同，
但圖樣完全一致。這正是 **Rank = 1** 的幾何視覺意義：只有一種方向變化。

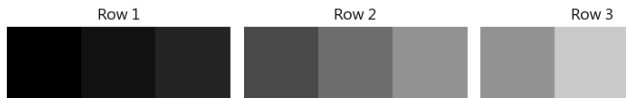


Figure 3: 由向量外積產生的 **Rank = 1** 矩陣（列圖樣為比例關係）

向量外積的意義

- 同學們可能會發現， $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 就是在算 $\mathbb{R}^{m \times 1}$ 中與 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 中的矩陣相乘，使用第一章學過的矩陣乘法計算即可，為什麼還要特別定義外積的概念呢？

向量外積的意義

- 同學們可能會發現， $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 就是在算 $\mathbb{R}^{m \times 1}$ 中與 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 中的矩陣相乘，使用第一章學過的矩陣乘法計算即可，為什麼還要特別定義外積的概念呢？
- 原因是，一般矩陣乘法可以是任意維度匹配的乘法，而外積專指「以一個行向量乘上一個列向量，得到一個 **Rank = 1** 的矩陣」這樣的「乘法」。事實上，因為

$$A = \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix},$$

向量外積的意義

- 同學們可能會發現， $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 就是在算 $\mathbb{R}^{m \times 1}$ 中與 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 中的矩陣相乘，使用第一章學過的矩陣乘法計算即可，為什麼還要特別定義外積的概念呢？
- 原因是，一般矩陣乘法可以是任意維度匹配的乘法，而外積專指「以一個行向量乘上一個列向量，得到一個 **Rank = 1** 的矩陣」這樣的「乘法」。事實上，因為

$$A = \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix},$$

- 向量外積所造出的矩陣結構具有高度的規則性：行與列皆成比例，整體變化集中在一個方向上。因此，它經常被用作低秩近似 (low-rank approximation) 與資料壓縮中的「基本單元」。

補充：Rank = 2 的例題

- 補充一個 **Rank = 2** 的例子：



Figure 4: 列向量含有兩個獨立方向 (Rank = 2)

- 這張圖展示了矩陣

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的三列對應的 1×3 灰階影像。

補充：Rank = 2 的例題

- 補充一個 **Rank = 2** 的例子：



Figure 4: 列向量含有兩個獨立方向 (Rank = 2)

- 這張圖展示了矩陣

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的三列對應的 1×3 灰階影像。

- 我們可以發現，前兩列為比例關係，但第三列圖樣與前兩列不同，代表它帶入了一個新的獨立方向。因此這個矩陣所張成的空間不再是一條線，而是一個平面，對應到 **Rank = 2**。