

Chapter 2 An Introduction to Matrix Analysis

基底與維度：如何描述影像資料的方向性

Cheng-Fang Su

(National Yang Ming Chiao Tung University)

Jun 9, 2025

基本觀念

- 我們在前面的課程已討論了向量的線性相依與線性獨立，接下來的問題是，如果我們手上有一堆向量，那麼要如何判斷這些向量到底「涵蓋了多少不同的方向」？

張成的基本觀念

- 如果我們手上有幾個向量，透過它們的線性組合，究竟可以走到多廣的地方？它們能不能「覆蓋整個平面」或「填滿整個空間」？這個問題的答案，就與「張成 (span)」這個觀念密切相關。

張成的基本觀念

- 如果我們手上有幾個向量，透過它們的線性組合，究竟可以走到多廣的地方？它們能不能「覆蓋整個平面」或「填滿整個空間」？這個問題的答案，就與「張成 (span)」這個觀念密切相關。
- 從幾何的角度來看，向量的張成就是：所有可以由這些向量線性組合得到的向量所構成的集合。

張成的基本觀念

- 如果我們手上有幾個向量，透過它們的線性組合，究竟可以走到多廣的地方？它們能不能「覆蓋整個平面」或「填滿整個空間」？這個問題的答案，就與「張成 (span)」這個觀念密切相關。
- 從幾何的角度來看，向量的張成就是：所有可以由這些向量線性組合得到的向量所構成的集合。
- 如果我們能把一個新向量寫成這幾個向量的加權結果（線性組合），那它就屬於這個「張成的空間」裡。例如：
 - (1) 一個向量可以張成一條線；
 - (2) 兩個不共線的向量可以張成一個平面；
 - (3) 三個不共面的向量可以張成三維空間。

張成的數學定義

Definition (張成, Span)

對向量集合 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ ，其張成空間定義為所有線性組合所構成的集合：

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \left\{ a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

這表示你可以用這些向量「加加乘乘」產生出整個空間裡的所有向量。

向量張成的例題

Example

考慮向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

則 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 所張成的空間 $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ 為

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a + 3b \\ 2a + 4b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

這個集合包含所有 $\mathbb{R}^2$ 中的向量，因為 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 是線性獨立的，它們不共線，所以只要適當選取比例 a 和 b ，就可以用它們的線性組合表示任何平面上的向量。

基底與維度

- 我們可以這樣想：

在一個向量空間中，若每個向量都可以由少數幾個固定方向的向量之線性組合所表示，那麼這些固定方向就扮演了描述整個空間的角色，稱為這個空間的基底（basis）。

這組基底所含的向量個數，正是這個空間的維度（dimension），也就是描述這個空間所需的「獨立方向」的數量。

- 不過，這裡的說法還是籠統了些，我們可以仔細看一下嚴謹的數學定義。

基底的數學定義

Definition (基底, Basis)

若向量集合 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ 同時滿足以下兩條件：

- (1) 線性獨立；
- (2) 張成整個空間 V ，即 $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = V$ ；

則此集合稱為空間 V 的一組基底。

基底的數學定義

Definition (基底, Basis)

若向量集合 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ 同時滿足以下兩條件：

(1) 線性獨立；

(2) 張成整個空間 V ，即 $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = V$ ；

則此集合稱為空間 V 的一組基底。

■ 以向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

為例，先前 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 張成了整個平面 $\mathbb{R}^2$ 且線性獨立，所以由定義可知 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ 為一組 $\mathbb{R}^2$ 中的基底。

基底的例題

- 考慮三個向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

這三個向量彼此正交、線性獨立，並能張成 $\mathbb{R}^3$ ，因此 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一組基底，我們也將這組基底稱為 $\mathbb{R}^3$ 的標準基底 (standard basis)。

維度的數學定義

Definition (維度, Dimension)

向量空間 V 的維度定義為其任一組基底中向量的個數，記為 $\dim(V)$ 。

維度的數學定義

Definition (維度, Dimension)

向量空間 V 的維度定義為其任一組基底中向量的個數，記為 $\dim(V)$ 。

Example

考慮以下三個向量：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

觀察可知， $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$ ，所以它不是新的方向，只是原方向的放大。而 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_3$ 則彼此線性獨立，提供兩個獨立方向。因此空間的維度為 2；且一組基底可以是 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ 。

維度的例題

Example

我們來看另一組例子：

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因為 $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ 並非新的方向，這表示只需要兩個向量 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ 就可以張成這三個向量所生成的向量子空間，且維度為 2，一組基底為 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ 。

在影像資料中理解基底與維度

- 我們可以把每張影像轉換成一個個行向量，然後觀察這些行向量之間的關係。
- 如果這些影像彼此很相似，代表它們其實只在少數幾個方向上有變化。換句話說，

這些影像可以用一小組「代表性方向」來描述！

這些方向就是所謂的基底。

- 其他影像只是這些基底的不同加權組合，就像我們可以用幾個積木就拼出許多不同的圖案一樣。

在影像資料中理解基底與維度

- 假設我們把 1 張 100×100 灰階影像切成 100 張 10×10 灰階影像，每一張 10×10 灰階影像都向量化成長度為 100 的行向量，然後把這 100 張影像的行向量排成一個矩陣 $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ 。
- 如果這些向量彼此很相似，那麼只需要少數幾個具代表性的向量來描述其他所有的向量，此時也表示影像資料中的變化不多，這些向量所張成的空間維度也會比較小。

在影像資料中理解基底與維度

```
from skimage import data, color
from skimage.transform import resize
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 讀取太空人圖像並轉為灰階
img = color.rgb2gray(data.astronaut())

# 縮放成 100x100
img = resize(img, (100, 100))

# 切成 10x10 區塊
patches = []
for i in range(0, 100, 10):
    for j in range(0, 100, 10):
        patch = img[i:i+10, j:j+10].flatten()
        patches.append(patch)

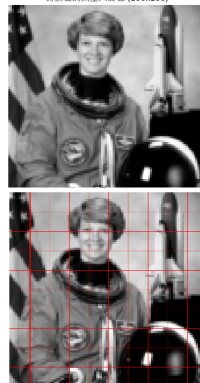
# 將所有 patch 組成矩陣
A = np.column_stack(patches)

print("總共區塊數量: ", A.shape[1])
print("基底維度 (rank): ", np.linalg.matrix_rank(A))

# 顯示圖片
plt.imshow(img, cmap='gray')
plt.title('轉換後的太空人影像 (100x100)')
plt.axis('off')
plt.show()
```

Python 切割區塊並分析基底維度

總共區塊數量: 100
基底維度 (rank): 100
轉換後的太空人影像 (100x100)



太空人原始影像與輸出結果

Figure 1: 從圖像切割區塊並觀察其所組成向量的基底維度

討論題

Example

以下是四個向量，分別代表從影像中擷取的四個小區塊，每個區塊都已轉為長度為 5 的行向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 29 \\ 41 \\ 49 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 45 \\ 60 \\ 75 \end{bmatrix}$$

- (1) 請問這些向量是否有明顯的相似性？是否可能落在某幾個共同方向上？
- (2) 根據你的觀察，這些向量可能是線性相依的嗎？請說明理由。
- (3) 這樣的現象在影像前景與背景資料中，對維度大小可能有什麼影響？