Chapter 2 An Introduction to Matrix Analysis
線性相依與線性獨立

Cheng-Fang Su

(National Yang Ming Chiao Tung University)

Jun 9, 2025

基本觀念

- 在空間中，我們會想知道，一組向量究竟能帶來幾種「不同的方向」? 有些向量看起來不同，但其實是沿著同一條線，只是長度不一樣、方向相反或者是上下左右平移。這樣的向量並沒有新增資訊，因為它們可以由某些向量「疊加」或「拉伸」後得到。

基本觀念

- 在空間中，我們會想知道，一組向量究竟能帶來幾種「不同的方向」? 有些向量看起來不同，但其實是沿著同一條線，只是長度不一樣、方向相反或者是上下左右平移。這樣的向量並沒有新增資訊，因為它們可以由某些向量「疊加」或「拉伸」後得到。
- 給定一組向量，如果當中有的向量可以透過其他向量的線性組合得到，我們說這組向量是線性相依的（Linear Dependent）；相反地，如果每一個向量都提供了新方向，無法由其他向量拼湊出來，我們就說這組向量是線性獨立的（Linear Independent）。

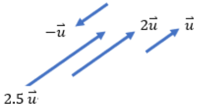

Figure 1: 所有向量皆平行（同向或反向），所以這四個向量為線性相依

基本觀念

- 線性獨立的向量是「擴展空間」的基礎，它們所能張成的空間維度會等於向量的數量；而線性相依的向量雖然看起來多，但其實在空間中只是「重複方向」，無法真正擴張空間的維度。

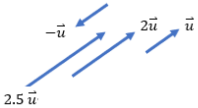

Figure 2: 因為這些向量皆平行，所以這四個向量只能構成「一條直線」的資訊

- 如果兩向量線性獨立又如何呢？

線性相依與線性獨立的實例

- 想像自己要和兩位朋友一起旅遊，每人提供一個導航方向，規劃你們的移動路線。

  如果三個人提供的方向彼此之間可以由「加減與倍數」計算出來，例如第二人說「我走的方向就是第一人的兩倍快」，第三人說「我其實是第一人的反方向」，那麼這三個方向之間並沒有真正提供新的資訊。雖然表面上有三個向量，但實際上我們只得到了一個方向的變化方式，其餘只是它的重複或變形，這就是線性相依的觀念。

線性相依與線性獨立的實例

- 想像自己要和兩位朋友一起旅遊，每人提供一個導航方向，規劃你們的移動路線。

  如果三個人提供的方向彼此之間可以由「加減與倍數」計算出來，例如第二人說「我走的方向就是第一人的兩倍快」，第三人說「我其實是第一人的反方向」，那麼這三個方向之間並沒有真正提供新的資訊。雖然表面上有三個向量，但實際上我們只得到了一個方向的變化方式，其餘只是它的重複或變形，這就是線性相依的觀念。

- 但如果只有兩個人去旅遊，規畫移動路線時分別指向「東」與「北」，那麼這兩個方向就各自提供了不同的資訊，它們是線性獨立的。這種情況下，你可以藉由這兩個基本方向，組合出許多其他方向，甚至幾乎到達平面上的任何一點，這也就是線性獨立的優勢所在。

線性相依與線性獨立的幾何觀念

請思考以下兩種情況：

線性相依與線性獨立的幾何觀念

請思考以下兩種情況：

(a) 向量 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 指向同一條直線，只是長度不同。此時，$\vec{v}_2 = 2\,\vec{v}_1$，彼此無法展開出新方向，因此它們是線性相依的。

線性相依與線性獨立的幾何觀念

請思考以下兩種情況：

(a) 向量 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 指向同一條直線，只是長度不同。此時，$\vec{v}_2 = 2\,\vec{v}_1$，彼此無法展開出新方向，因此它們是線性相依的。

(b) 向量 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 則分別指向 x 軸正向與 y 軸正向，能張成整個 $\mathbb{R}^2$，因此是線性獨立的。

這樣的幾何觀念將是我們理解矩陣秩與子空間結構的重要基礎。

線性相依與線性獨立的數學定義

Definition (線性相依與獨立)

設 $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_k \in \mathbb{R}^n$。若存在非全為零的常數 $c_1, \ldots, c_k$，使得：

$$c_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}, \tag{1}$$

則稱 $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_k$ 線性相依。反之，若只有當所有 $c_i = 0$ 時 (1) 式才成立，則稱 $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_k$ 線性獨立。

線性相依與線性獨立的數學例題

Example

考慮以下三個向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

試判斷這三個向量是否線性相依。

例題補充說明

- 觀察以下三個向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- 事實上，我們可看出

$$\vec{v}_2 = 2\ \vec{v}_1, \text{ and } \quad \vec{v}_1 = -1\ \vec{v}_3,$$

因此三個向量皆在 $\vec{v}_1$ 所張成的一條線上，故此向量組 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ 是線性相依的。

利用程式來檢查向量是否線性相依

我們也可以利用程式來檢查向量是否線性相依：

```python
import numpy as np

# 三個向量作為矩陣的欄向量
V = np.array([[1, 2, -1],
              [2, 4, -2],
              [3, 6, -3]])

# 計算秩 (rank)：若 rank < 向量數，則相依
rank = np.linalg.matrix_rank(V)
print("向量秩為：", rank)

if rank < V.shape[1]:
    print("這些向量是線性相依的。")
else:
    print("這些向量是線性獨立的。")
```

(a) 線性相依性檢查程式碼

```
向量秩為：1
這些向量是線性相依的。
```

(b) 程式執行結果

上述程式輸出為「秩為 1」，代表三個向量其實都在同一條線上。從程式執行的結果，我們可看出「秩」是檢查線性相依性的有效工具，之後會有更多深入的討論。

線性相依與影像資料

- 在應用上，我們把影片視為許多張靜態圖像（frame）依時間順序連續播放而成，每一張圖像稱為「一幀」，如果影片的播放速率是 30 fps（frames per second），表示每秒會顯示 30 張不同的幀。
- 在影像前後景分離的情境中，若多張影像的背景部分幾乎不變，那麼將這些影像向量化後，得到的一群向量彼此之間通常會非常接近，甚至可能互為比例或線性組合。
- 換句話說，這些向量會集中在少數幾個方向上，而不是分散地指向各種不同方向。這樣的特性意味著，我們可以只用少數幾個基本方向就描述這些背景影像的主要變化。
- 在處理監視器錄影時，我們常會說「從影片中擷取出 10 幀影像作為分析資料」，意思是，我們從中抽出 10 張靜止畫面來進行更進一步的分析。

靜態攝影機下的背景建模

- 假設用固定攝影機拍攝一個走廊，得到多張連續畫面（例如有 n 張影像，且每張影像為 100×100 灰階圖像，轉為向量為長度 10000 的行向量），我們可以將這些影像整理為一個矩陣 $A \in \mathbb{R}^{10000 \times n}$，$A$ 中的每行皆為一幀影像向量。
- 當一張影像轉換成向量時，其每個像素值變成這個向量的一個分量。將多張影像排列成一個矩陣時，就能從向量的角度來觀察它們是否提供了新的資訊方向。
- 若背景完全不變（例如空無一人），則所有影像非常相似，這些影像的向量幾乎都是沿著同一個方向，只是亮度略有不同。這樣的向量組合是線性相依的。若有人走過，只會造成部分畫面不同，這使得有些影像變得不再完全是前面幾張的組合，但整體而言，大多數影像仍然「看起來差不多」，所以「變化的程度」仍然不大。這兩種情形，影像矩陣的行向量的「秩」小於 n，且許多影像向量之間是線性相依的。

以程式來判斷這些影像向量之間是否線性相依

- 以程式來判斷這些影像向量是否線性相依，可以參考下面的程式碼：

```
import numpy as np
from numpy.linalg import matrix_rank
from skimage.io import imread_collection
from skimage.color import rgb2gray
from skimage.transform import resize

# 讀取多張影像
images = imread_collection('path/*.jpg')  # 假設已經是對齊的固定攝影機畫面

# 每張影像轉成向量，建立資料矩陣
A = np.column_stack([
    resize(rgb2gray(img), (100, 100)).flatten()
    for img in images
])

# 判斷向量間是否相依
r = matrix_rank(A)
print(f"影像資料矩陣的秩為 {r}，共 {A.shape[1]} 張影像。")
```

若「秩」遠小於影像張數，表示很多影像向量線性相依⋯這是我們第二次看到「秩」這個名詞。

觀念總結

- 我們可以把這部份學到的觀念做成表格，方便同學們理解中間的差別：

現象	數學概念	代表意義
多張影像幾乎一樣	向量線性相依	資訊重複，沒有新內容
畫面出現變化（如有人走動）	向量線性獨立	帶來新方向，增加資訊

Table 1: 影像變化與線性關係的對應

應用問題討論

若使用固定攝影機拍攝一段空無一人的走廊影像，連續擷取了 10 張畫面，並將每張影像轉成長度為 10000 的向量。你發現這些向量彼此之間非常相似，幾乎可以用其中一張影像的向量來表示其餘影像。

(1) 請問這表示這些影像向量之間是線性相依還是線性獨立？為什麼？

(2) 若第 11 張影像中出現了一位走過走廊的人，你認為這張影像的向量與前面 10 張會是線性相依的嗎？請解釋你的推論。