Chapter 1 Fundamentals of Linear Algebra
向量的線性組合

Cheng-Fang Su

(National Yang Ming Chiao Tung University)

Jun 9, 2025

線性組合的數學定義

Definition (線性組合, Linear Combination)

若給定向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$，以及實數係數 $c_1, c_2, \ldots, c_k$，則向量：

$$\vec{w} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \cdots + c_k \vec{v}_k$$

稱為這些向量的線性組合。

線性組合的例題

Example

設 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$c_1 = 3$，$c_2 = -2$，則：

$$\vec{w} = 3\,\vec{v}_1 - 2\,\vec{v}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$\vec{w}$ 是 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 的線性組合，也就是從原點指向平面中坐標 $(3, -2)$ 的箭頭。

線性組合的幾何意義

- 從幾何意義來看，向量的線性組合可視為將不同方向與長度的向量進行加權「拉伸與疊加」，然後產生新的向量。
- 例如在二維平面中，兩個不共線的向量所張成的所有線性組合會構成一個平面區域。

線性組合的幾何意義

- 從幾何意義來看，向量的線性組合可視為將不同方向與長度的向量進行加權「拉伸與疊加」，然後產生新的向量。
- 例如在二維平面中，兩個不共線的向量所張成的所有線性組合會構成一個平面區域。

Example

令

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

則任意向量 $\vec{w} = a\,\vec{v}_1 + b\,\vec{v}_2$ 可表示為 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，對應到 $\mathbb{R}^2$ 中的點 (a, b)。

線性組合的幾何意義

- 從幾何意義來看，向量的線性組合可視為將不同方向與長度的向量進行加權「拉伸與疊加」，然後產生新的向量。
- 例如在二維平面中，兩個不共線的向量所張成的所有線性組合會構成一個平面區域。

Example

令

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

則任意向量 $\vec{w} = a\,\vec{v}_1 + b\,\vec{v}_2$ 可表示為 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，對應到 $\mathbb{R}^2$ 中的點 (a, b)。

- 此外，若 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 呈倍數關係（例如 $\vec{v}_2 = 2\,\vec{v}_1$），所有線性組合明顯地將只落在一條直線上，無法填滿平面。

線性組合的數學形式與操作例題

Example

考慮三個三維空間中的向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

如果我們對這三個向量做線性組合，會產生哪些新的向量？

線性組合的數學形式與操作例題：結論

由觀察可知：

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

所以 $\vec{v}_3$ 其實沒有提供新的方向，它只是前兩個方向的加總，也就是說：

- $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 可以帶我們走「東西向」和「南北向」；
- $\vec{v}_3$ 只是走東再走北，跟 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 本身的方向沒差別；
- 因此，用這三個向量做任何線性組合，都無法讓我們「往上或往下移動」。

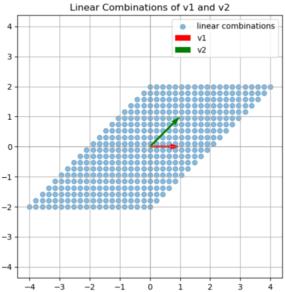
所以這些線性組合只會落在水平的 xy 平面中，無法離開這個平面，即使原本題目給定的三個向量都是落在三維空間裡。

線性組合的實作

我們可以用 Python 程式碼來說明視覺化線性組合範圍：

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 定義兩個基底向量
v1 = np.array([1, 0])
v2 = np.array([1, 1])

# 建立係數範圍
c1_vals = np.linspace(-2, 2, 20)
c2_vals = np.linspace(-2, 2, 20)

# 建立所有線性組合點
points = [c1 * v1 + c2 * v2 for c1 in c1_vals for c2 in c2_vals]
points = np.array(points)

# 繪圖
plt.figure(figsize=(6, 6))
plt.scatter(points[:, 0], points[:, 1], alpha=0.5, label='linear combinations')
plt.quiver(0, 0, v1[0], v1[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='r', label='v1')
plt.quiver(0, 0, v2[0], v2[1], angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='g', label='v2')
plt.axhline(0, color='gray', lw=0.5)
plt.axvline(0, color='gray', lw=0.5)
plt.axis('equal')
plt.legend()
plt.title('Linear Combinations of v1 and v2')
plt.grid(True)
plt.show()
```

(a) 對應的 Python 程式碼



(b) v1 與 v2 的線性組合所構成的平面

Figure 1: 線性組合視覺化與程式說明

線性組合的應用

- 線性組合的概念放在一組矩陣 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 中也適用，矩陣的線性組合相當於把一組矩陣拿來做純量乘法後相加，即：

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k \,,$$

線性組合的應用

- 線性組合的概念放在一組矩陣 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 中也適用，矩陣的線性組合相當於把一組矩陣拿來做純量乘法後相加，即：

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k \,,$$

- 所以，當兩張影像轉換成矩陣後做線性組合時，我們實際上是在計算類似以下的公式：

$$I = \alpha \cdot I_1 + (1 - \alpha) \cdot I_2 \,, \quad \alpha \in [0, 1] \,,$$

線性組合的應用

- 線性組合的概念放在一組矩陣 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 中也適用，矩陣的線性組合相當於把一組矩陣拿來做純量乘法後相加，即：

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k \,,$$

- 所以，當兩張影像轉換成矩陣後做線性組合時，我們實際上是在計算類似以下的公式：

$$I = \alpha \cdot I_1 + (1 - \alpha) \cdot I_2 \,, \quad \alpha \in [0, 1] \,,$$

- 這種操作在影像處理中常見於影像混合。

例題

- 假設有兩張圖像 $I_1, I_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$，定義影像混合後的結果 I_{blend} 為：

$$I_{\text{blend}} = \alpha I_1 + (1-\alpha) I_2\,,$$

其中 $\alpha \in [0,1]$，可以控制兩圖之間混合的比例。

- 針對 image1.jpg 及 image2.jpg，可用 $\alpha = 0.3$ 達到以下的效果：

Figure 2: 影像輸出後的比較

習題解說：影像的向量化

Exercise

灰階影像有另一種數學表達的方式，我們可以將一張 $m \times n$ 像素的灰階影像視為長度為 mn 的行向量，如果我們手中有 k 張 $m \times n$ 像素的灰階影像，每一張都表示成長度為 mn 的行向量，則這 k 張影像可排列成一個 $mn \times k$ 的大矩陣 M，且矩陣 M 中的每一行都代表了一張圖片的資訊。試解釋若矩陣 M 中所有行向量都可用某一個特定向量的線性組合來表示，這對這張圖片而言代表什麼？

將灰階影像轉成行向量

由先前的介紹，我們已知一個把灰階影像轉成行向量的方法，也就是說，我們可以將一張張 $m \times n$ 像素的灰階影像

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(2)} & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}_{m\times n}, \cdots$$

將灰階影像轉成行向量

視為長度為 mn 的行向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{2n}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}_{mn\times 1}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{2n}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}_{mn\times 1}, \cdots \vec{v}_i = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{1n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{2n}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{mn}^{(i)} \end{bmatrix}_{mn\times 1}, \cdots$$

將灰階影像轉成行向量

如果我們手中有 k 張 $m \times n$ 像素的灰階影像，每一張都表示成長度為 mn 的行向量，則這 k 張影像可排列成一個 $mn \times k$ 的矩陣 I_{total} 如下：

$$I_{\text{total}} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_k]_{mn\times k} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{11}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}^{(1)} & a_{1n}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{21}^{(2)} & \cdots & a_{21}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n}^{(1)} & a_{2n}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{mn}^{(1)} & a_{mn}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}_{mn\times k}.$$

矩陣中的每一行都代表了一張圖片的資訊。

向量空間的定義

- 既然每個影像矩陣都可以視為一個行向量，那麼我們就需要一個數學結構來描述「一組向量的合法集合」，這個結構就是「向量空間」。
- 設 V 為一個非空集合，其上的元素稱為向量，且定義了兩個運算：向量加法與純量乘法。若這兩個運算滿足以下所有的條件，則稱 V 為定義在體 $\mathbb{R}$ 上的向量空間（vector space over $\mathbb{R}$）：

1. 加法封閉性：對任意 $\vec{u}, \vec{v} \in V$，有 $\vec{u} + \vec{v} \in V$。
2. 加法交換律：對任意 $\vec{u}, \vec{v} \in V$，有 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$。
3. 加法結合律：對任意 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$，有 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$。
4. 存在加法單位元：存在 $\vec{0} \in V$，使得對任意 $\vec{v} \in V$，皆有 $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$。
5. 存在加法反元素：對任意 $\vec{v} \in V$，存在 $-\vec{v} \in V$，使得 $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$。

向量空間的定義

6. 純量乘法封閉性：對任意 $c \in \mathbb{R}$ 與 $\vec{v} \in V$，有 $c\vec{v} \in V$。
7. 純量乘法結合律：對任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 與 $\vec{v} \in V$，有 $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$。
8. 分配律：
   - 向量上的分配律：對任意 $a \in \mathbb{R}$、$\vec{u}, \vec{v} \in V$，$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$。
   - 純量上的分配律：對任意 $a, b \in \mathbb{R}$、$\vec{v} \in V$，$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$。
9. 單位純量作用：對任意 $\vec{v} \in V$，$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$。

向量空間的例題

- 在向量空間中，影像即向量。我們可以將一張 $m \times n$ 的影像視為長度為 mn 的行向量，所有這種「拉直後的影像」，將構成 $\mathbb{R}^{mn \times 1}$ 的向量空間，而且，在此空間中，與加法、純量乘法相關的操作全都合法，所以，影像經過處理後仍會是合法的影像。

向量空間的例題

- 在向量空間中，影像即向量。我們可以將一張 $m \times n$ 的影像視為長度為 mn 的行向量，所有這種「拉直後的影像」，將構成 $\mathbb{R}^{mn\times 1}$ 的向量空間，而且，在此空間中，與加法、純量乘法相關的操作全都合法，所以，影像經過處理後仍會是合法的影像。

Example

設 $I_1, I_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 為兩張影像，將它們向量化後，得到：

$$\vec{i}_1 = \mathrm{vec}(I_1), \quad \vec{i}_2 = \mathrm{vec}(I_2) \in \mathbb{R}^{mn\times 1}.$$

對任意純量 $a, b \in \mathbb{R}$，我們可定義新的向量：

$$\vec{i} = a\,\vec{i}_1 + b\,\vec{i}_2\ .$$

則 $\vec{i} \in \mathbb{R}^{mn\times 1}$，說明向量化後的影像在此向量空間中對加法與純量乘法封閉。若我們再將 $\vec{i}$ 還原為 $m \times n$ 的影像矩陣，仍然是一張合法的影像。 □

矩陣空間的觀念

- 在數學中，原本向量是指 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，例如 $\vec{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$，而我們對向量做的操作（包括加法與純量乘法），要求這些運算滿足一系列的條件，這使得 $\mathbb{R}^n$ 成為一個向量空間。

矩陣空間的觀念

- 在數學中，原本向量是指 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，例如 $\vec{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$，而我們對向量做的操作（包括加法與純量乘法），要求這些運算滿足一系列的條件，這使得 $\mathbb{R}^n$ 成為一個向量空間。
- 然而向量空間不一定只能是 $\mathbb{R}^n$，任何集合只要定義加法與純量乘法，且這兩個運算滿足定義中所有的條件，這個集合就可以構成一個向量空間。

矩陣空間的觀念

- 在數學中，原本向量是指 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，例如 $\vec{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$，而我們對向量做的操作（包括加法與純量乘法），要求這些運算滿足一系列的條件，這使得 $\mathbb{R}^n$ 成為一個向量空間。
- 然而向量空間不一定只能是 $\mathbb{R}^n$，任何集合只要定義加法與純量乘法，且這兩個運算滿足定義中所有的條件，這個集合就可以構成一個向量空間。
- 所有由 $m \times n$ 的實矩陣構成的集合：

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \right\},$$

這個集合在矩陣加法與純量乘法下也構成向量空間，因為它滿足向量空間定義裡所有的條件。

矩陣空間的觀念

- 在數學中，原本向量是指 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，例如 $\vec{v} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$，而我們對向量做的操作（包括加法與純量乘法），要求這些運算滿足一系列的條件，這使得 $\mathbb{R}^n$ 成為一個向量空間。
- 然而向量空間不一定只能是 $\mathbb{R}^n$，任何集合只要定義加法與純量乘法，且這兩個運算滿足定義中所有的條件，這個集合就可以構成一個向量空間。
- 所有由 $m \times n$ 的實矩陣構成的集合：

  $$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n}\right\},$$

  這個集合在矩陣加法與純量乘法下也構成向量空間，因為它滿足向量空間定義裡所有的條件。
- 所以矩陣可以視為某個向量空間中的元素，只是我們把它的形狀維持 $m \times n$ 的大小，而不是把它拉直成 $\mathbb{R}^{mn\times 1}$ 的行向量。

矩陣空間的例題

Example

若 $I_1, I_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$，則對任何 $a, b \in \mathbb{R}$，有

$$I = a \cdot I_1 + b \cdot I_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

矩陣 I 仍然在 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中，這顯示了影像矩陣在像素加權上構成封閉的向量空間。 □

- 回過頭觀察上一節的圖，我們可從視覺化的角度觀察到影像的線性組合仍是一張合法的影像，這就是所謂的向量空間的封閉性。