

Chapter 1 Fundamentals of Linear Algebra

矩陣乘法

Cheng-Fang Su

(National Yang Ming Chiao Tung University)

May 23, 2025

基本概念

- 矩陣乘法是線性代數中最核心的運算之一。
- 不同於加法與純量乘法的「逐個元素」操作，矩陣乘法引入了向量內積的概念，進一步揭示線性變換的本質。
- 對影像處理來說，許多空間轉換（如模糊、旋轉、投影等）都可以形式化地表達為矩陣乘法的應用。

矩陣乘法的定義

Definition (矩陣乘法, Matrix Multiplication)

設 $A = [a_{ik}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 與 $B = [b_{kj}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 則它們的乘積 $C = A \times B = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 定義為:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad \text{對於所有 } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p,$$

其中 c_{ij} 表示矩陣 C 的第 i 列第 j 行元素。

換言之, C 中的元素 c_{ij} 是 A 的第 i 列與 B 的第 j 行的內積。

矩陣乘法的例題一

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

矩陣乘法的例題二

我們考慮以下兩個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

這兩個矩陣的維度符合定義，所以可以相乘，計算得到的結果為 2×2 矩陣：

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 + 0 + 12 & 3 + 1 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

矩陣乘法的例題二

我們考慮以下兩個矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

這兩個矩陣的維度符合定義，所以可以相乘，計算得到的結果為 2×2 矩陣：

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 + 0 + 12 & 3 + 1 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

也有一個比較趣味的例子供同學們參考：

$$\begin{bmatrix} \text{弱} & \text{強} \\ \text{燒} & \text{定} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{肉} & \text{肉} \\ \text{食} & \text{食} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{弱肉} + \text{強食} & \text{弱肉} + \text{強食} \\ \text{燒肉} + \text{定食} & \text{燒肉} + \text{定食} \end{bmatrix}.$$

向量的概念

- 向量是線性代數的基本工具，在高中時是數學物理的重要知識之一。
- 向量同時具有大小和方向，一般我們會寫為

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

的形式，它可視為起點為原點，終點指向點 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ，且長度恰為

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

的幾何對象。

- 通常向量的起點和終點並不那麼重要，兩個起點不一樣的向量，只要大小相等，方向相同，就可以稱為是同一個向量。

向量的定義

Definition (向量, Vector)

在 $\mathbb{R}^n$ 中，一個向量是由 n 個實數組成的有序數列，常記為：

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (\equiv \mathbf{v}).$$

它同時具有方向與大小，而這樣的記法稱為向量的坐標表示法。特別地，向量的長度可定義為

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2},$$

通常記為 $|\vec{v}|$ 或是 $\|\vec{v}\|$ 。

向量的矩陣形式

- $\mathbb{R}^n$ 中的向量其實也可以寫成「矩陣的形式」；然而，如果我們要把向量寫成矩陣形式後進行運算，通常會把向量寫成直的「行向量」，也就是

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (1)$$

式 (1) 中的表示法就是向量的矩陣形式。

- 有些書會把式 (1) 中的行向量寫成

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]^T,$$

其中，符號 $\top$ 的操作稱為轉置 (transpose)。

轉置的說明

REMARK

若矩陣 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，則 A 的轉置矩陣 $A^\top$ 可寫為

$$A^\top = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

比方說， $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ，其轉置矩陣 $A^\top$ 為

$$A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

□

例題一

注意到在線性代數裡，我們通常都將向量寫成行向量（即矩陣形式）來與其他矩陣做運算。

Example

給定矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ，向量（矩陣形式） $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ，則

$$A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 4b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

□

例題二

Example

設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

則矩陣與向量相乘為：

$$A \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 3y + z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1},$$

這表示一個 3 維的向量經由 A 映射到 2 維的空間。

□

矩陣乘法的性質

- 學習完矩陣乘法的基本定義與計算方法後，我們需要理解矩陣乘法在結構上具備哪些性質，例如，矩陣乘法滿足結合律與分配律，卻不滿足交換性。

Proposition (矩陣乘法的結合律與分配律)

設 A, B, C 為適當維度的矩陣，則：

(1) 結合律： $(AB)C = A(BC)$ 。

(2) 分配律： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

例題

Example

假設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

請依序計算：

- (1) 請比較 $(AB)C$ 與 $A(BC)$ 兩者是否相等。
- (2) 請比較 $A(B + C)$ 與 $AB + AC$ 兩者是否相等。
- (3) 請比較 $B + C$ 與 $C + B$ 是否相等，並請試著說明它所代表的現象。

矩陣乘法的非交換性

- 矩陣 A 、 B 相乘具有「非交換性」，意思是，若 AB 、 BA 都存在，則 AB 不一定等於 BA 。
- 所謂的「非交換性」不僅是數學上的概念，在應用時，它也會造成影像在不同操作順序下結果的差異。
- 矩陣乘法可視為對向量進行線性變換，這些變換包括旋轉、縮放、平移等操作。
- 當兩個矩陣依序作用在一個向量 $\vec{u}$ 上時，實際上是將 $\vec{u}$ 先經過第一個變換 S ，再經過第二個變換 T ，即

$$\vec{u} \xrightarrow{\text{經過第一個變換}} S\vec{u} \xrightarrow{\text{經過第二個變換}} T(S\vec{u}) = TS\vec{u}.$$

因此，改變 S 與 T 的乘法順序就可能改變最終的變換結果。

矩陣乘法的非交換性實作

- 假設 A 是一個水平拉伸矩陣， B 是一個旋轉矩陣。若先拉伸再旋轉 (BA)，與先旋轉再拉伸 (AB) 將得到完全不同的結果。這反映出矩陣乘法的非交換性能直接影響空間幾何的結構與應用。

最後可得到結果如圖 1 所示：



Figure 1: 影像輸出後的比較

矩陣乘法的非交換性例題一

Example (非交換性)

設：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

則：

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

因此 $AB \neq BA$ ，矩陣乘法不具交換性。

□

矩陣乘法的非交換性例題二

令：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2},$$

因為 AB 是 2×3 乘以 4×2 ，中間維度 $3 \neq 4$ ，無法相乘，因此 AB 不符合矩陣乘法的前提，即 AB 無定義。然而， BA 是 4×2 乘以 2×3 ，中間維度皆為 2，所以可進行矩陣乘法，結果為 4×3 矩陣。

矩陣乘法的非交換性例題二

實際計算 BA :

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

所以，即使 AB 存在， BA 卻可能無法被定義，所以矩陣乘法沒有交換性。

單位矩陣的定義

Definition (單位矩陣)

對任意正整數 n ， $n \times n$ 的單位矩陣 (Identity Matrix) 記為 $\mathbb{I}_n$ ，定義為對角線元素皆為 1，其餘元素皆為 0 的正方形矩陣，即：

$$(\mathbb{I}_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j, \\ 0 & \text{若 } i \neq j, \end{cases} \quad \text{其中 } 1 \leq i, j \leq n.$$

■ 單位矩陣 $\mathbb{I}_n$ 通常也寫為 $\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$ 。

零矩陣的定義

Definition (零矩陣)

對任意 $m, n \in \mathbb{N}$ ， $m \times n$ 的零矩陣 (Zero Matrix) 記為 $\mathbf{0}_{m \times n}$ ，定義為所有元素皆為 0 的矩陣：

$$(\mathbf{0}_{m \times n})_{ij} = 0, \quad \text{對所有 } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

若不特別指定大小，常簡記為 $\mathbf{0}$ 。

例題

Example

設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 則可由計算驗證出：

$$(1) A I_2 = I_2 A = A; \quad (2) A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A; \quad (3) A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}.$$