

單變數純量函數
積分（應用篇）

Volumes

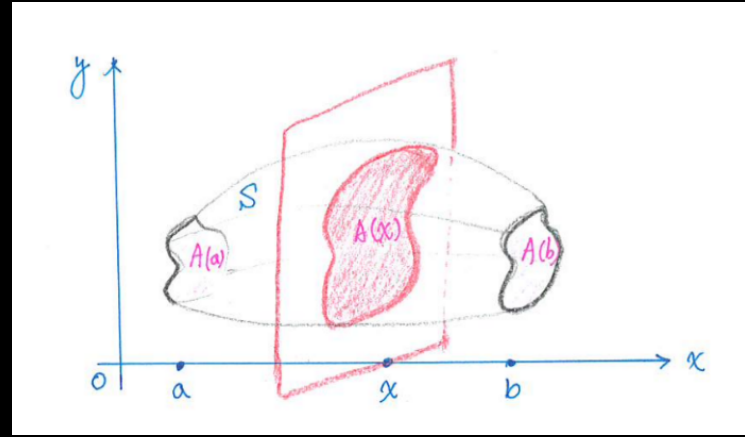
The Disk Method
圓盤法

非旋轉型
示意圖

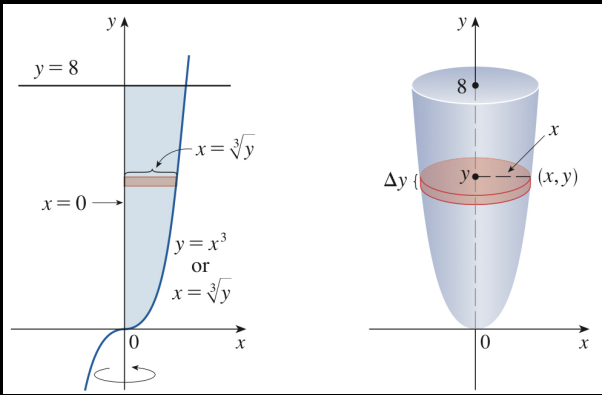
計算方式

如果切開的截面和 x 軸垂直，我們可以用公式 $V = \int_a^b A(x) \, dx$ 。
如果切開的截面和 y 軸垂直，我們可以用公式 $V = \int_c^d A(y) \, dy$ 。
(下面的示意圖是以截面和 x 軸垂直為例！)

注意：立體物體的截面要怎麼切，都是看你方便計算而決定！



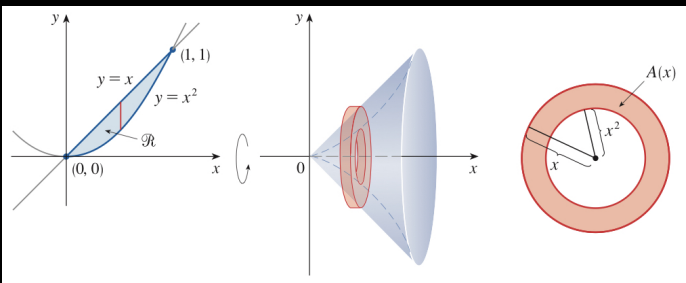
如果是繞 x 軸旋轉，則旋轉體體積為 $V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$ 。
如果是繞 y 軸旋轉，則旋轉體體積為 $V = \int_c^d A(y) \, dy = \int_c^d \pi [g(y)]^2 \, dy$ 。
(下面的示意圖是以繞 y 軸為例！)



旋轉型

計算方式

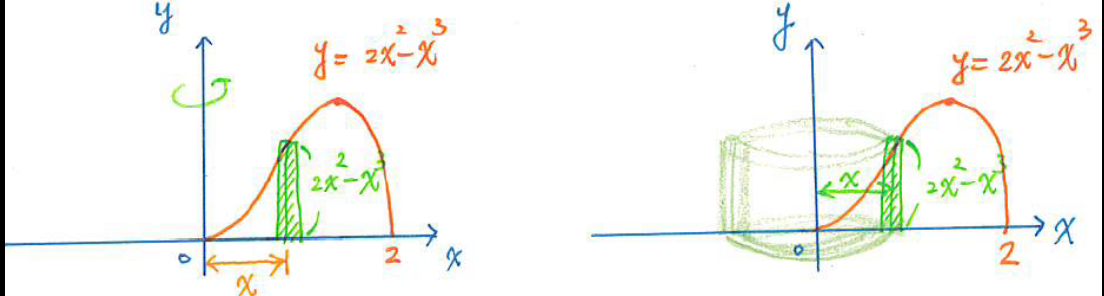
若旋轉體是兩函數繞 x 軸而得，則體積公式為： $V = \int_a^b \pi [R(x)]^2 \, dx - \int_a^b \pi [r(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b \{ [R(x)]^2 - [r(x)]^2 \} \, dx$
若旋轉體是兩函數繞 y 軸而得，則體積公式為： $V = \int_c^d \pi [R(y)]^2 \, dy - \int_c^d \pi [r(y)]^2 \, dy = \pi \int_c^d \{ [R(y)]^2 - [r(y)]^2 \} \, dy$
(下面的示意圖是以繞 x 軸為例！)



The Shell Method
剝殼法

計算方式

1. «當旋轉體是繞 y 軸而得到時» 由上往下看，把旋轉體由上往下切，切成一圈一圈的，對每一圈的面積做積分！
此時旋轉體體積的公式為： $V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x) \, dx$ 。公式裡的 $2\pi x$ 代表的是圓周長， $f(x)$ 對應的是高度， dx 對應的是厚度。
2. «當旋轉體是繞 x 軸而得到時» 由左往右看，把旋轉體由左往右切，切成一層一層的，對每一層的面積做積分！
此時旋轉體體積的公式為： $V = \int_c^d 2\pi y \cdot f(y) \, dy$ 。公式裡的 $2\pi y$ 代表的是圓周長， $f(y)$ 對應的是高度， dy 對應的是厚度。
(下面的示意圖是以繞 y 軸為例！)



Arc Length

弧長公式

If f' is continuous on $[a, b]$, then the length of the curve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$,

is $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$

If g' is continuous on $[c, d]$, then the length of the curve $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$,

is $L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} \, dy$

弧長函數 $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} \, dt$

弧長函數可以幫助我們計算從一個特定起始點到任意結束點的弧長！

Area of a Surface of Revolution

公式
繞 x 軸旋轉
繞 y 軸旋轉

Let S denote the area of a surface of revolution.

Assume f is positive and continuously differentiable on $[a, b]$. If the curve is $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ and rotates about x -axis, then

$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$ (請參考下列左圖)

Let S denote the area of a surface of revolution.

Assume g is positive and continuously differentiable on $[c, d]$. If the curve is $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ and rotates about y -axis, then

$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} \, dy$ (請參考下列右圖)

