單變數純量函數積分（技巧篇）

Trigonometric Substitution 三角代換

- $\sqrt{(a^2-x^2)^m},\ m\in\mathbb{N}$：令 $x=a\sin\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos x$
- $\sqrt{(a^2+x^2)^m},\ m\in\mathbb{N}$：令 $x=a\tan\theta, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec x$
- $\sqrt{(x^2-a^2)^m},\ m\in\mathbb{N}$：令 $x=a\sec\theta, 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}$，則 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan x$

這個方法其實是一種 Inverse Substitution，和前面學的變數變換的差別是
變數變換是令 $u=f(x)$，也就是新變數是舊變數的函數；
三角代換則是令 $x=f(\theta)$，也就是舊變數是新變數的函數（須為一對一函數，所以限制 θ 範圍）！

Tangent Half-Angle Substitution 半角置換法

Let $t=\tan\frac{x}{2}$, then we have that

1. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$
2. $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
3. $dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$

適用於被積分函數含有 Sin 或 Cos 之有理函數者！

範例

Find $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}\,dx$

$$\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=2\int\frac{1}{t^2+2t+5}\,dt$$
$$=2\int\frac{1}{2^2+(t+1)^2}d(t+1)\qquad \text{Let } t+1=2\tan\theta, \text{ then } d(t+1)=2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=2\int\frac{1}{4(1+\tan^2\theta)}2\sec^2\theta\,d\theta\qquad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$
$$=\int\frac{1}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta\quad=\theta\qquad \tan\theta=\frac{t+1}{2}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}(\frac{t+1}{2})$$
$$=\tan^{-1}(\frac{t+1}{2})+C\qquad t=\tan\frac{x}{2}$$
$$=\tan^{-1}(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{2})+C$$

Partial Fractions 部分分式

先備知識

Rational functions $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 有兩種：

If $\deg(P)\ge\deg(Q)$, then $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ is called "improper". （例如 $\dfrac{x^2+1}{x-3}$）

If $\deg(P)<\deg(Q)$, then $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ is called "proper". （例如 $\dfrac{x-3}{x^2+1}$）

方法說明

定理告訴我們，任何 Proper Rational Fucntion 都能被表示成 $\dfrac{A}{(ax+b)^k}$ 或 $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ 形式的部份分式的和，
其中 ax^2+bx+c 必須 "irreducible"（意思是，ax^2+bx+c 的判別式 b^2-4ac 必須 <0。詳細說明如下：
1.分母 $Q(x)$ 因式分解成 $(ax+b)^k$ 或 $(ax^2+bx+c)^k$ 的形式。
2.每個 $(ax+b)^k$ 會對應到 $\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$，分子都是常數。
3.每個 $(ax^2+bx+c)^k$ 會對應到 $\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$，分子都是一次式。

《注意》遇到 Improper 就使用「長除法」把它改成 Polynomial + Proper 再算。例如：$\dfrac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\dfrac{2}{x-1}$.

情況

- Case 1：The denominator $Q(x)$ is a product of a distinct linear factors.
  例如：$Q(x)=2x^3+3x^2-2x=x(2x-1)(x+2)$
- Case 2：The denominator $Q(x)$ is a product of a distinct linear factors, some of which are repeated.
  例如：$Q(x)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$
- Case 3：The denominator $Q(x)$ contains irreducible quadratic factors, none of which is repeated.
  例如：$Q(x)=(x-2)(x^2+1)(x^2+4)$
  ⚠ 通常會用到這個公式，請熟記：$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})+c$
- Case 4：The denominator $Q(x)$ contains a repeated irreducible quadratic factor.
  例如：$Q(x)=x(x-1)(x^2+1)^3$

每個 Case 的做法不太一樣，請看 Stewart 原文書範例。

Rationalizing Substitutions

我們可以透過適當的變數變換將無理函數變成有理函數，尤其是當遇到 $\sqrt[n]{g(x)}$，讓 $u=\sqrt[n]{g(x)}$ 通常有效。

例：Evaluate $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

Let $u=\sqrt{x+4}$. Then $u^2=x+4$, so $x=u^2-4$ and $dx=2u\,du$.

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=\int\frac{u}{u^2-4}2u\,du=2\int\frac{u^2}{u^2-4}\,du=2\int(1+\frac{4}{u^2-4})\,du$$
$$=2\int du+8\int\frac{1}{u^2-4}\,du=2\int du+8\cdot\frac{1}{2\cdot2}\int(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2})\,du$$
$$=2u+8\cdot\frac{1}{2\cdot2}\ln|\frac{u-2}{u+2}|+c$$
$$=2\sqrt{x+4}+2\ln|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}|+c$$

Trigonometric Integral

三角函數積分

一次

(1) $\int\sin x\,dx=-\cos x+c$ (2) $\int\cos x\,dx=\sin x+c$

(3) $\displaystyle\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\int\frac{-1}{\cos x}\,d\cos x=-\ln|\cos x|+c=\ln|\sec x|+c$

(4) $\displaystyle\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\int\frac{1}{\sin x}\,d\sin x=\ln|\sin x|+c$

(5) $\displaystyle\int\sec x\,dx=\int\sec x\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx=\int\frac{1}{\sec x+\tan x}\,d(\sec x+\tan x)=\ln|\sec x+\tan x|+c$

(6) $\displaystyle\int\csc x\,dx=\int\csc x\frac{\csc x-\cot x}{\csc x-\cot x}\,dx=\int\frac{1}{\csc x-\cot x}\,d(\csc x-\cot x)=\ln|\csc x-\cot x|+c$

二次

(1) $\displaystyle\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos2x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\,dx-\frac{1}{4}\int\cos2x\,d\,2x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x+c$

(2) $\displaystyle\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos2x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\,dx+\frac{1}{4}\int\cos2x\,d\,2x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin2x+c$

(3) $\displaystyle\int\tan^2x\,dx=\int(\sec^2x-1)\,dx=\int\sec^2x\,dx-\int dx=\tan x-x+c$

(4) $\displaystyle\int\cot^2x\,dx=\int(\csc^2x-1)\,dx=\int\csc^2x\,dx-\int dx=-\cot x-x+c$

(5) $\int\sec^2x\,dx=\tan x+c$ (6) $\int\csc^2x\,dx=-\cot x+c$

三次

(1) $\displaystyle\int\sin^3x\,dx=\int\sin^2x(\sin x\,dx)=-\int(1-\cos^2x)\,d\cos x=\int(-1)\,d\cos x+\int\cos^2x\,d\cos x=-\cos x+\int t^2\,dt=-\cos x+\frac{t^3}{3}+c\quad t=\cos x$

(2) $\displaystyle\int\cos^3x\,dx=\int\cos^2x(\cos x\,dx)=\int(1-\sin^2x)\,d\sin x=\sin x-\frac{\sin^3x}{3}+c$

(3) $\displaystyle\int\tan^3x\,dx=\int\frac{\tan^2x}{\sec x}(\sec x\tan x\,dx)=\int\frac{\sec^2x-1}{\sec x}\,d(\sec x)=\int(\sec x-\frac{1}{\sec x})\,d(\sec x)=\frac{1}{2}(\sec x)^2-\ln|\sec x|+c$

(4) $\displaystyle\int\cot^3x\,dx=\int\frac{\cot^2x}{\csc x}(\csc x\cot x\,dx)=-\int\frac{\csc^2x-1}{\csc x}\,d\csc x=\int\frac{1}{\csc x}\,d\csc x-\int\csc x\,d\csc x=\ln|\csc x|-\frac{1}{2}\csc^2x+c$

(5) $\displaystyle\int\sec^3x\,dx=\int\sec x(\sec^2x\,dx)=\int\sec x\,d(\tan x)$ (Integration by Part)
$\displaystyle=\sec x\tan x-\int\tan x\,d(\sec x)=\sec x\tan x-\int(\sec^2x-1)\sec x\,dx$
$\displaystyle\Rightarrow$ 故 $\displaystyle\int\sec^3x\,dx=\sec x\tan x-\int\sec^3x\,dx+\int\sec x\,dx$
$\displaystyle\Rightarrow\int\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\int\sec x\,dx)=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|+c)$

(6) $\displaystyle\int\csc^3x\,dx=\int\csc x(\csc^2x\,dx)=-\int\csc x\,d\cot x=-\csc x\cot x-\int\cot^2x\csc x\,dx$
$\displaystyle=-\csc x\cot x-\int(\csc^2x-1)\csc x\,dx=-\csc x\cot x-\int\csc^3x\,dx+\int\csc x\,dx$
$\displaystyle\Rightarrow$ 故 $\displaystyle\int\csc^3x\,dx=\frac{1}{2}(-\csc x\cot x+\int\csc x\,dx)$
$\displaystyle\Rightarrow\int\csc^3x\,dx=\frac{1}{2}(-\csc x\cot x+\ln|\csc x-\cot x|+c)$

三次以上的可以使用這些公式！
如果我們的 Integrand 是函數的次方，我們可以用之前學過的分部積分幫我們降低次數，因此我們稱之為 Reduction Formula！

(1) $\displaystyle\int\sin^nx\,dx=-\frac{\sin^{n-1}\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$

(2) $\displaystyle\int\cos^nx\,dx=\frac{\sin x}{n}\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\tan^nx\,dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\int\tan^{n-2}x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\cot^nx\,dx=-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}-\int\cot^{n-2}x\,dx$

(5) $\displaystyle\int\sec^nx\,dx=\frac{\sec^{n-2}x\tan x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\,dx$

(6) $\displaystyle\int\csc^nx=-\frac{\csc^{n-2}x\cot x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\csc^{n-2}x\,dx$

高次三角函數積分

$\int\sin^mx\cos^nx$ 型，$m,n>0$

1. m 為奇數，設法都換成 $\cos x$：
$$\int\sin^mx\cos^nx\,dx=\int\sin^{2k+1}x\cos^nx\,dx=\int(\sin^2x)^k\cos^nx\sin x\,dx$$
$$=-\int(1-\cos^2x)^k\cos^nx\,d(\cos x)$$

2. n 為奇數，設法都換成 $\sin x$：
$$\int\sin^mx\cos^nx\,dx=\int\sin^mx\cos^{2k+1}x\,dx=\int\sin^mx(\cos^2x)^k\cos x\,dx$$
$$=-\int\sin^mx(1-\sin^2x)^k\,d(\sin x)$$

3. m n 全為偶 $\Rightarrow$ 利用 $\sin x\cos x=\dfrac{\sin2x}{2}$ or 降次公式 $\begin{cases}\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}\\ \cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}\end{cases}$.

$\int\tan^mx\sec^nx$ 型，$m,n>0$

1. n 為偶數
$$\int\tan^mx\sec^nx\,dx=\int\tan^mx\sec^{2k}x\,dx=\int\tan^mx(\sec^2x)^{k-1}\sec^2\ dx$$
$$=\int\tan^mx(\tan^2x+1)^{k-1}\,d(\tan x)$$

2. m 為奇數
$$\int\tan^m\sec^n\ dx=\int(\tan^2x)^k\sec^{n-1}\sec x\tan x\,dx=\int(\sec^2x-1)^k\sec^{n-1}x\,d(\sec x).$$

3. m 為偶數，n 為奇數
$$\int\tan^mx\sec^nx\,dx=\int\tan^{2k}\sec^nx\,dx=\int(\tan^2x)^k\sec^n\ dx=\int(\sec^2x-1)^k\sec^nx\,dx$$
乘開後 $\Rightarrow$ 用 $\displaystyle\int\sec^nx\,dx=\frac{\sec^{n-2}x\tan x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\,dx\quad(n\ge2)$
$$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+c\ ;\int\sec^2x\,dx=\tan x+c$$

倍次三角函數積分

- 求 $\int\sin mx\cos nx\,dx$：利用 $2\sin A\cos B=\sin(A-B)+\sin(A+B)$
- 求 $\int\sin mx\sin nx\,dx$：利用 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$
- 求 $\int\cos mx\cos nx\,dx$：利用 $2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)$