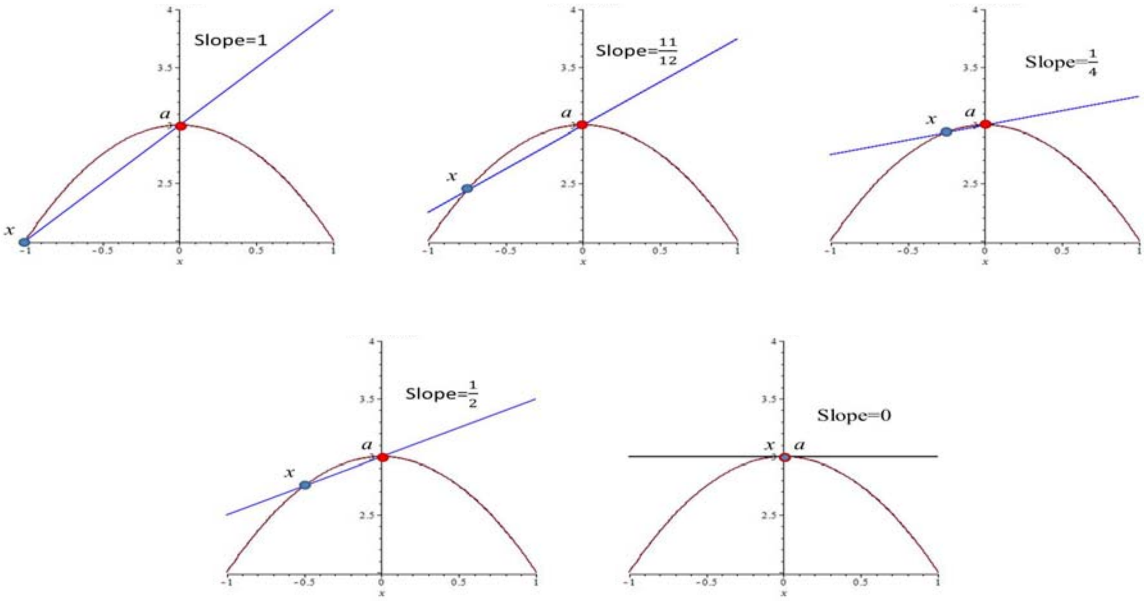
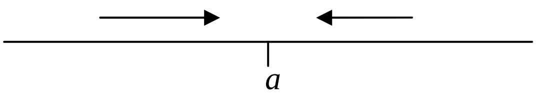
§2-2－2-3 Limit

＊ $f(x)=\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 函數上過 x 點和 a 點的割線斜率

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=?=g$ 在過 x=a 點的切線斜率。



＊ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ， $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ (右極限)， $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ (左極限)



i. $x\to a$, x 愈來愈靠近 a ,但從來不是 a .

ii. ‧極限存在 $\Rightarrow$ 極限唯一 $\Rightarrow$ 左極限＝右極限.

‧左、右極限分別存在且相等 $\Rightarrow$ 極限存在.

iii. ‧ L 不一定是 $f(a)$.

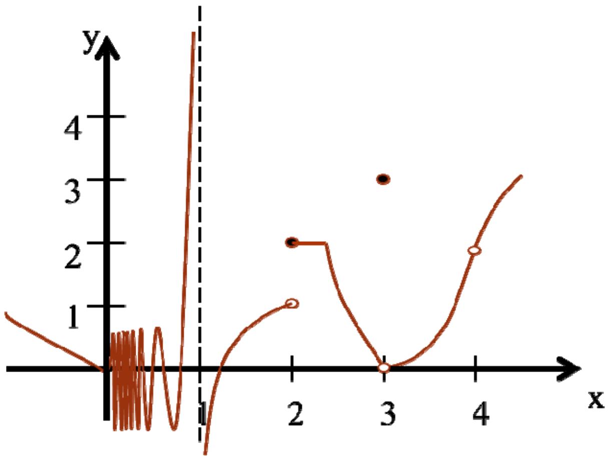
iv. If

$$f:\begin{cases}\text{1. Polynomials}\\ \text{2. Rational functions, } a\in \text{Domain}(f)\\ \text{3. The graph of } f \text{ has no break,}\end{cases}$$

$$\Rightarrow L=f(a).$$

＊更一般來說，若 f: continuous at a, 則 $L=f(a)$

Example 1：



(1) 那些a使得上述左、右極限，分別存在。

Solution：(i) $R-\{1\}$ (也即只有 $a=1$ 時， 左極限不存在).

(ii) $R-\{0,1\}$ (也即在 $a=0$ or 1 時， 右極限不存在).

(2) 那些a使得上述極限存在。

Solution： $R-\{0,1,2\}$ (註)

＊註-1：

Let $x_n = \dfrac{1}{2n\pi+\theta}$, $\theta \in R$. Then $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n} = \lim_{x_n\to 0}\sin\frac{1}{x_n} = \lim_{x_n\to 0}\sin\theta = \sin\theta.$$

此表示當 x 由右邊趨近 0 時，若趨近路徑不相同時，極限不同。

＊註-2：

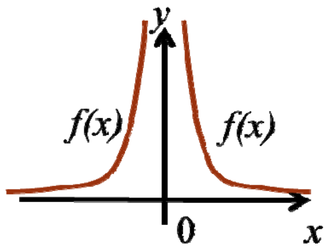
$\lim_{x\to 1} f(x)$ 我們可以說極限不存在，

或寫成 $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ 且 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ ，

但不可寫成 $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ ！

＊註-3：

若如右圖，則可寫成 $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$



(3) 那些 a 使得 $L = f(a)$.

Solution： $R - \{0,1,2,3,4\}$

Example 2： $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = ?$

Solution： $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1$

Example 3： $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = ?$

Solution： $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

＊註記：
1.在極限的定義中，x 趨近於 1，但是 x 卻不能=1
2. 計算極限，不一定能直接帶進去算。

Example 4： $\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=?\qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=?$

Solution： $\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=\infty\qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=-\infty$

Example 5： $\lim_{x\to 1.5}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}=?$

Solution：

(i) 右極限： $\lim_{x\to 1.5^+}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}=\frac{x(2x-3)}{(2x-3)}=x=1.5$

(ii) 左極限： $\lim_{x\to 1.5^-}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}=\frac{x(2x-3)}{-(2x-3)}=-x=-1.5$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1.5}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$ 不存在

＊註記：
本題目是要提醒大家，兩個分數相加減，應先通分，合併成一個分數。

Example 6： $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right]=?$

Solution： $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

Example 7： $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=?$

Solution：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

＊註記：
見根號可利用 $(a-b)(a+b)$ $=a^2-b^2$ 來化簡。

Example 8： $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)=?$

> ＊註記：
> 本題同時運用例題 6 與例題 7 之技巧。

Solution：

合併： $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}\right)$

$$\left(\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}\right):=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+t})}{t\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}$$

Example 9： $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=?$

Solution：

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)}$$

$$=\frac{4}{2}=2$$

Example 10： $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}=?$

> ＊註記：
> 利用乘法公式：
> $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 去根號。

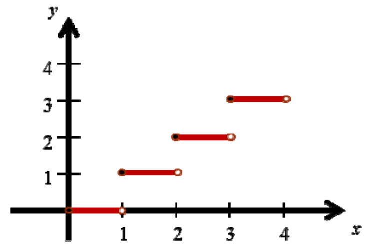
Solution：

Let $a=1+cx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a^{\frac{1}{3}}-1)(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)}{x(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-1}{x(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cx}{x(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{c}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1}=\frac{c}{3}$$

Example 11： $\lim_{x\to 2^+}[x]=?$ $\lim_{x\to 2^-}[x]=?$



Solution： $\lim_{x\to 2^+}[x]=2$; $\lim_{x\to 2^-}[x]=1$

Example 12： $\lim_{x\to -2}\dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exits. Find a and its limit.

Solution：

$$3(-2)^2+a(-2)+a+3=0$$
$$\Rightarrow a=15$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+15x+18}{x^2+x-2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=-1$$

＊註記：
分母趨近於 0 當 $x\to$-2，因此分子也要趨近於 0 當 $x\to$-2，才能保證極限存在！

Example 13： If $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=5$, find the following limits.

(a) $\lim_{x\to 0}f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

Solution： (a) $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Example 14： $\lim_{x\to 4}f(x)=$exists. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4}, x>4\\ 8-ax,\ x<4\end{cases}$ Find a.

Solution： 右極限$=0=$左極限$=8-4a$

$\Rightarrow a=2$

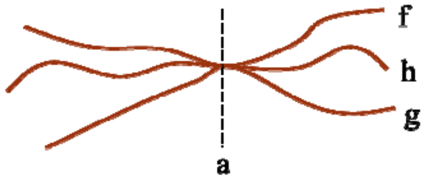
Limit Laws. $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ exist.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) * g(x) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

Here $* = +, -, \times$.

若 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在且不為 0，則 $*$ 也可是 $\div$。

The Sandwich Theorem.



If $f(x) \le h(x) \le g(x)$, except possibly at a, for x near a, and

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$, then $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Example 15： $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = ?$

Solution：

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

Example 16： If $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$

prove that $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Example 17： The figure shows a fixed circle c_1 with equation $(x-1)^2 + y^2 = 1$ and a shrinking circle c_2 with radius r and center the origin. P is the point $(0,r)$, Q is the upper point of intersection of the two circle, and R is the point of intersection of the line PQ and the x-axis. What happens to R as c_2 shrinks, that is as $r \to 0^+$?