§14.2 Limits and Continuity

＊極限： $f: D \subset R^2 \to R.$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

Definition：

Given $\varepsilon > 0, \exists$ a $\delta > 0$ s.t.

$|f(x,y) - L| < \varepsilon$ wherever $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

and $(x,y) \in D.$

__Recall__： $\lim_{x\to a} f(x) = L.$

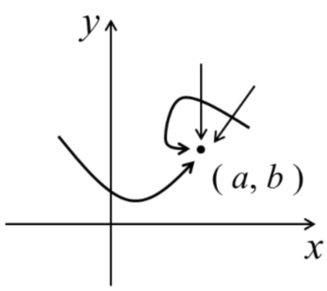
Given $\varepsilon > 0, \exists$ a $\delta > 0$ s.t.

$|f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x-a| < \delta.$

(i). 極限存在必唯一.

(ii). $(x, y)\to(a, b)$ (二維逼近)和 $x\to a$ (一維逼近)的差別：

- 在 2 維有無窮多的方向逼近到(a, b)
- 沿著曲線也可以



(iii). 驗證不存在：

- 只需要找 2 個方向，其極限值不同.
- Polar coordinates

(iv). 驗證存在：

定義或夾擠或 polar coordinates.

Example 1：

Show that the limit of $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ does not exist.

Proof：

Key：分子和分母為齊次，則可沿直線證明極限不存在.

Let $y = mx \Rightarrow f(x, mx) = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}.$

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

The limit changes as m changes $\Rightarrow$ not exists.

Example 2：

$$f(x,y)=\frac{x^{\frac{2}{3}}\sin y}{x^2+y^2}\cong\frac{x^{\frac{2}{3}}y}{x^2+y^2}\text{ ,問 }\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)\text{ 是否存在.}$$

Let $f=\dfrac{g}{h}$, where $g=x^{\frac{2}{3}}\sin y$, $h=x^2+y^2$.

h：齊次, 偶數次方；

g：齊次, ($\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$ 次方),因 $\sin y$ 和 y 趨近於 0 的速度相同.

$\Rightarrow$ 分母跑到 0 的速度比分子跑到 0 還快.

Proof：

$$\text{令 } y=x \Rightarrow f(x,x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}\sin x}{2x^2}=\frac{x^{\frac{2}{3}}\sin x}{2x\cdot x}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

① $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ as $x\to 0$

② $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{2x}\to\infty$ as $x\to 0^+$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

Example 3：

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=?$$

Let $f=\dfrac{g}{h}$,

h：齊次、偶數次方；

g：一項 3 次、一項 2 次

(類似 **Example 1**)

Proof：

Let $y=mx \Rightarrow f(x,mx)=\dfrac{x^3+(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\dfrac{x+m^2}{1+m^2}\to\dfrac{m^2}{1+m^2}$ as $x\to 0$.

The limit changes as m changes. $\Rightarrow$ limit not exist.

Example 4：

$$f(x,y)=\frac{x^2 y}{x^4+y^4}$$

Let $f=\frac{g}{h}$, g：3 次； h：偶數齊次 (4 次).

$\Rightarrow$ 分母跑到 0 的速度比分子跑到 0 的速度快 (類似 **Example 2**)

Proof：

Let $y=x \Rightarrow f(x,x)=\frac{x^3}{x^4+x^4}=\frac{x^3}{2x^4}=\frac{1}{2x} \to \infty$ as $x\to 0^+$.

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

Example 5：

若 $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x+y^3}$, 則 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

奇數次方

Proof：

因為分母不可為 0, $x+y^3\neq 0$.

假設 $x=-y^3+y^3=0$ 比 y^2 項大即可, 讓 (x,y) 沿著 y 軸前進 $\Rightarrow x$ 代 0 .

$$f(0,y)=\frac{0+y^2}{0+y^3}=\frac{1}{y} \to \infty \text{ as } y\to 0^+.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

Example 6：

$$f(x,y)=\frac{x^3 y\sin^2 y}{x^2+y^2}\approx\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}.$$

$f=\dfrac{g}{h}$, h：偶數齊次； g：$\deg(g)>\deg(h)\Rightarrow$ 分子跑到 0 比分母快

$\Rightarrow$ limit 存在且為 0

Proof：

By 夾擠,

$$0\le|f(x,y)|=\left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|xy^3|\le|xy^3|\to 0 \text{ as } (x,y)\to(0,0)$$

把剩下項提出來

造一個分子和分母相同次方的式子

since $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\le 1$

$\Rightarrow\quad 0\le|f(x,y)|\le|xy^3|$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0 \quad —— (*)$

再一次夾擠：$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$

Since (*) 、$-|f(x,y)|\to 0$、$|f(x,y)|\to 0$ as $(x,y)\to(0,0)$

Hence $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ as $(x,y)\to(0,0)$ 原極限存在且為 0 .

$$f(x,y)=\frac{x^3y\sin^2 y}{x^2+y^2}=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sin^2 y}{y^2}\to 0 \text{ as } (x,y)\to(0,0)$$

Since $\dfrac{\sin^2 y}{y^2}\to 1$ as $(x,y)\to(0,0)$.

討論：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 極限存在性

(i) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$

(ii) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

(iii) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ (討論題目講解請參見課程影音約 26:20 處)

Example 7：

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^4}$$

Proof：

Let $y=mx \Rightarrow f(x,mx)=\dfrac{x(mx)}{x^2+(mx)^4}$

$$=\frac{mx^2}{x^2+m^4x^4}=\frac{m}{1+m^4x^2} \quad \to m \text{ as } x\to 0.$$

$\Rightarrow$ Limit changes as *m* changes.

$\Rightarrow$ Limit not exist.

Example 8：

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

$f=\dfrac{g}{h}$, h：偶數次方； g： $\left.\begin{array}{l}\deg(g)>\deg(\text{某一項 } h(x^2))\\ \deg(g)<\deg(\text{某一項 } h(y^4))\end{array}\right\}$ 交叉項

h：偶數次方+交叉

① 分子的某一部分有分母的某一項$\Rightarrow$夾擠

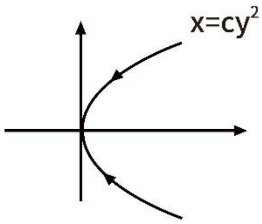
$$0 \swarrow 0\le|f(x,y)|=\left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right||y|\le|y| \searrow 0 \quad \Rightarrow \text{ limit 存在且唯一}$$

② 算幾項

討論： $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^4}$

分母： $\dfrac{x^2+y^4}{2}\ge|x|y^2$ ，$xy^2 \to$ 算幾項

(算幾不等式)



Solution：

令 $x=cy^2$, $\Rightarrow$齊次

$f(cy^2,y)=\dfrac{cy^4}{c^2y^4+y^4}=\dfrac{c}{c^2+1}$ $\Rightarrow$limit 不存在

＊ $y=mx$, $f(x,mx)\Rightarrow$沿著任一直線近入原點

$\Rightarrow$極限存在且為 0, 但原問題極限不存在

討論： $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$

分母：偶數次、交叉項$\Rightarrow$(算幾) $\dfrac{x^2+y^4}{2} \geq |x|y^2 \Rightarrow xy^2 \to$ 算幾項

分子的 degree 大於算幾項且可除盡. $\dfrac{xy^3}{xy^2} = y \Rightarrow$夾擠

$$0 \swarrow 0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{|x|y^2}{x^2+y^4}\right| |y| \leq \frac{1}{2}|y| \leq |y| \searrow 0 \Rightarrow \text{ limit 存在且為 } 0$$

By 算幾不等式, $\dfrac{x^2+y^4}{2} \geq |x|y^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{|x|y^2}{x^2+y^4}$

討論：

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^6}$$

交叉項、分母偶數次方、算幾項$= xy^3$(次方大於分子且可除盡分子)

<u>說明</u>：

$$f(y^3,y) = \frac{y^5}{2y^6} = \frac{1}{2y} \to \infty \text{ as } y \to 0^+. \text{ limit 不存在.}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \text{不存在.}$$

Example 9：

(i) $f(x,y) = \dfrac{x+y^3}{x^2+y^2}$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

當 $y = x$, $\dfrac{y^3}{x^2+y^2}$ 的極限存在, 但 $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 的極限不存在,

因此$\dfrac{x+y^3}{x^2+y^2}$ limit 不存在.

(ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^3}$

分母：奇數次方$\Rightarrow$ limit 不存在.

Example 10：

$$f(x,y,z) = \frac{xyz+y^2z+x^2z}{x^2+y^2+z^4}$$

交叉項+偶數次方(分母)

加絕對值 $\Rightarrow |f(x,y,z)| = \left|\dfrac{xy+y^2+x^2}{x^2+y^2+z^4}\right||z| \le \dfrac{|xy+y^2+x^2|}{x^2+y^2}|z|$

$$\le \left(\frac{|xy|}{x^2+y^2} + \frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}\right)|z| \le \left(\frac{1}{2}+1\right)|z| = \frac{3}{2}|z|$$

由算幾不等式 $\dfrac{x^2+y^2}{2} \ge |xy| \Rightarrow \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2}$

$_0\swarrow 0 \le |f(x,y,z)| \le \dfrac{3}{2}|z| \searrow_0$ ，由夾擠 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |f(x,y,z)| = 0$

再一次夾擠, 得到原問題極限值存在且為 0 .